

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

APPROCHE STATISTIQUE DE CALIBRATION DES SYSTÈMES
BONUS-MALUS EN ASSURANCE AUTOMOBILE

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
ROFICK AYINDE INOUSSA

JANVIER 2013

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je voudrais d'abord remercier toutes les personnes qui m'ont apporté du soutien tout au long de mes études et qui ont contribué à ce projet.

En tout premier lieu, je voudrais remercier mon directeur de recherche Jean-Philippe Boucher qui a été la personne ressource à la réalisation de ce projet. Il m'a permis d'appliquer mon projet de recherche en milieu de travail et cela fût un réel succès. Aussi, il a toujours su me guider et me conseiller de manière judicieuse.

Je tiens aussi à remercier la Faculté des sciences de l'UQAM en général et tous les professeurs de mon baccalauréat et de ma maîtrise en particulier qui m'ont enseigné l'actuariat et la statistique. Les compétences que j'ai acquises grâce à ces professeurs, notamment en ce qui a trait aux différents outils statistiques utilisés de nos jours, me seront d'une grande utilité dans le futur.

Je souhaite également remercier l'Union Canadienne qui m'a donné l'opportunité de mettre en application mon projet de recherche dans leur compagnie. Je voudrais aussi remercier à cet effet, Sarah Petersen à travers le programme MITACS pour le financement de mon stage de recherche à l'Union Canadienne.

Finalement, je voudrais exprimer ma profonde gratitude à toute ma famille qui m'a soutenu de près ou de loin durant mes études.

NOTATIONS

Le travail présent aura la notation suivante :

- N_t représente le nombre de réclamations totales pour la couverture collision ou responsabilité civile de l'assuré durant la période t ;
- N_t^F représente le nombre de réclamations responsables de l'assuré durant la période t ;
- N_t^{Fc} représente le nombre de réclamations non responsables de l'assuré durant la période t ;
- λ_t représente la fréquence de réclamation totale pour la couverture collision ou responsabilité civile de l'assuré durant la période t ;
- λ_t^F représente la fréquence de réclamation responsable durant la période t ;
- λ_t^{Fc} représente la fréquence de réclamation non responsable durant la période t ;
- θ représente l'hétérogénéité de l'assuré, c'est-à-dire le paramètre englobant toutes les caractéristiques non observables de l'assuré ;
- X_t représente la matrice comportant les différentes caractéristiques observables de l'assuré pour la période t ;
- β représente les coefficients relatifs à l'estimation de la fréquence de réclamation issue de la tarification *a priori* ;
- SBM signifie le système bonus-malus.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xi
RÉSUMÉ	xv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
CONCEPTS PRÉALABLES	5
1.1 Assurance automobile	5
1.2 Tarification <i>a priori</i>	6
1.3 Tarification <i>a posteriori</i>	7
1.4 Bonus-malus	8
1.4.1 Définition	8
1.4.2 Exemples	9
1.5 Notions de probabilités et de statistique	10
1.5.1 Distributions	10
1.5.2 Estimateurs du maximum de vraisemblance	16
1.5.3 Critères d'information	17
1.5.4 Déviance	18
1.5.5 Test de Wald	19
1.6 Données utilisées	20
1.6.1 Statistiques de base	21
1.6.2 Disposition des données	22
1.7 Systèmes de tarification <i>a priori</i> et <i>a posteriori</i> utilisées par la compagnie .	23
CHAPITRE II	
CALIBRATION DES SYSTÈMES BONUS-MALUS - APPROCHE CLASSIQUE	25
2.1 Notions de base	26
2.1.1 Règles de transition	26

2.1.2	Matrice de probabilités de transition	27
2.2	Méthode asymptotique	29
2.2.1	Relativités sans contraintes	29
2.2.2	Relativités linéaires	31
2.2.3	Relativités bilinéaires	33
2.3	Méthode non asymptotique	37
2.3.1	Relativités	37
2.3.2	Choix du niveau de départ	39
2.4	Métriques d'évaluation des systèmes bonus-malus	40
2.4.1	Le coefficient de variation des primes	41
2.4.2	La qualité asymptotique du SBM	41
2.4.3	L'erreur carrée moyenne de prédiction	42
2.4.4	L'élasticité du SBM	43
2.4.5	Le taux de convergence	43
2.4.6	Le niveau moyen stationnaire du SBM	44
2.4.7	La transparence d'un SBM optimal	45
2.5	Applications avec les données	46
2.5.1	Tarification déjà choisie	46
2.5.2	Caractère responsable versus non-responsable	47
2.5.3	SBM à deux dimensions	48
2.5.4	Estimation des paramètres d'hétérogénéité	50
2.5.5	Estimation des relativités	51
2.5.6	Utilisation du nombre d'années de détention du permis de conduire	67
2.5.7	Limitation de l'expérience de conduite	67
2.5.8	Évaluation des systèmes bonus-malus	68
2.6	Problème de l'approche classique	74
2.6.1	Explication	74
2.6.2	Solution	76

CHAPITRE III

CALIBRATION DES SYSTÈMES BONUS-MALUS - APPROCHE STATISTIQUE

79

3.1	Méthode utilisant l'historique des réclamations	80
3.1.1	Modèle statistique considérant toute l'expérience de conduite	80
3.1.2	Modèle statistique qui limite l'expérience de conduite	86
3.1.3	Estimation des paramètres	86
3.1.4	Choix du niveau de départ	87
3.1.5	Modélisation de la variance	88
3.2	Méthode n'utilisant pas l'historique des réclamations	91
3.3	Évaluation des systèmes bonus-malus	92
3.4	Applications avec les données	92
3.4.1	Modèles statistiques qui considèrent toute l'expérience de conduite	93
3.4.2	Modèle statistique qui limite l'expérience de conduite	96
3.4.3	Comparaison des modèles statistiques	98
3.4.4	Évaluation des systèmes bonus-malus	99
3.5	Comparaison avec l'approche classique	102
3.5.1	Approche classique	102
3.5.2	Approche statistique	104
	CONCLUSION	111
	APPENDICE A	
	APPROCHE CLASSIQUE	113
	APPENDICE B	
	APPROCHE STATISTIQUE	121
	BIBLIOGRAPHIE	123

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Distribution de la fréquence de réclamations totales en fonction du nombre d'années de détention du permis de conduire	23
2.1 Distribution des relativités sans contraintes obtenues selon la méthode asymptotique	34
2.2 Distribution des formes de relativités du SBM $-1/0/+9$ selon la méthode asymptotique	54
2.3 Distribution des formes de surcharges du SBM $-1/0/+9$ selon la méthode asymptotique	54
2.4 Distribution des formes de relativités du SBM $-1/0/+9$ selon la méthode non asymptotique qui considère toute l'expérience de conduite	60
2.5 Distribution des formes de surcharges du SBM $-1/0/+9$ selon la méthode non asymptotique qui considère toute l'expérience de conduite	60
2.6 Distribution des formes de relativités du SBM $-1/0/+9$ selon la méthode non asymptotique qui limite l'expérience de conduite	64
2.7 Distribution des formes de surcharges du SBM $-1/0/+9$ selon la méthode non asymptotique qui limite l'expérience de conduite	64
2.8 Evolution de la convergence à la distribution stationnaire du SBM $-1/0/+8$ pour les modèles général, bilinéaire et linéaire	76
3.1 Distribution des formes de relativités du SBM $-1/0/+8$ selon le modèle statistique qui considère toute l'expérience de conduite et utilise l'historique	96
3.2 Distribution des formes de surcharges du SBM $-1/0/+8$ selon le modèle statistique qui considère toute l'expérience de conduite et utilise l'historique	97
3.3 Distribution des formes de relativités du SBM $-1/0/+8$ selon le modèle statistique qui limite l'expérience de conduite	101
3.4 Distribution des formes de surcharges du SBM $-1/0/+8$ selon le modèle statistique qui limite l'expérience de conduite	102

3.5	Distribution de l'espérance du nombre de réclamations dans les niveaux du SBM $-1/0/+9$	106
3.6	Distribution de la variance du nombre de réclamations dans les niveaux du SBM $-1/0/+9$	107
A.1	Distribution des relativités générales selon la méthode asymptotique . .	114
A.2	Distribution conditionnelle de l'hétérogénéité pour un assuré moyen ayant 4 ou 40 ans d'expérience de conduite	119

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
1.1 Système bonus-malus à classes	10
1.2 Règles de transition d'un SBM à 6 niveaux avec échelle -1/TOP	11
1.3 Règles de transition d'un SBM à 6 niveaux avec échelle -1/+2	12
1.4 Statistiques descriptives résumant le nombre de réclamations du portefeuille	22
2.1 Règles de transition d'un SBM à 6 niveaux avec échelle -1/0/+2	49
2.2 Test de Wald sur le paramètre α	51
2.3 Relativités estimées selon la méthode asymptotique	55
2.4 Surcharges estimées selon la méthode asymptotique	56
2.5 Relativités estimées selon la méthode non asymptotique qui considère toute l'expérience de conduite	61
2.6 Surcharges estimées selon la méthode non asymptotique qui considère toute l'expérience de conduite	62
2.7 Relativités estimées selon la méthode non asymptotique qui limite l'expérience de conduite	65
2.8 Surcharges estimées selon la méthode non asymptotique qui limite l'expérience de conduite	66
2.9 Métriques d'évaluation variant selon la pénalité en utilisant la méthode asymptotique	71
2.10 Métriques d'évaluation variant selon la pénalité et la forme de relativités en utilisant la méthode asymptotique	72
2.11 Métriques d'évaluation variant selon la pénalité en utilisant la méthode non asymptotique	74
2.12 Métriques d'évaluation variant selon la pénalité et la forme de relativité en utilisant la méthode non asymptotique	75
2.13 Taux de convergence moyen du portefeuille	75

3.1	Exemple descriptif de r_{it} en fonction du niveau e	82
3.2	Relativités estimées selon le modèle statistique qui considère toute l'expérience de conduite et utilise l'historique	94
3.3	Surcharges estimées selon le modèle statistique qui considère toute l'expérience de conduite et utilise l'historique	95
3.4	Valeurs de la log-vraisemblance estimée selon les différents scénarios en tenant compte du niveau unique attribué au début de l'historique	98
3.5	Relativités estimées selon le modèle statistique qui limite l'expérience de conduite	99
3.6	Surcharges estimées selon le modèle statistique qui limite l'expérience de conduite	100
3.7	Mesure d'évaluation statistique variant selon la pénalité de l'échelle bonus-malus	101
3.8	Mesures d'évaluation statistique variant selon la pénalité et la forme de relativités	103
3.9	Log-vraisemblance de la binomiale négative selon les modèles statistiques qui considèrent toute l'expérience de conduite	108
3.10	Espérance et variance du nombre de réclamations dans les niveaux du SBM $-1/0/+9$ selon l'approche classique	109
3.11	Espérance et variance du nombre de réclamations dans les niveaux du SBM $-1/0/+9$ selon l'approche statistique	110
A.1	Distribution des assurés dans les niveaux bonus-malus selon la méthode asymptotique	113
A.2	Distribution des assurés dans les niveaux bonus-malus selon la méthode non asymptotique qui limite l'expérience de conduite	115
A.3	Choix du niveau de départ selon la méthode non asymptotique qui limite l'expérience de conduite	116
A.4	Distribution des assurés dans les niveaux bonus-malus selon la méthode non asymptotique qui considère toute l'expérience de conduite	117
A.5	Choix du niveau de départ selon la méthode non asymptotique qui considère toute l'expérience de conduite	118
B.1	Distribution des assurés dans les niveaux bonus-malus selon le modèle statistique qui limite l'expérience de conduite	121

B.2 Relativités linéaires du SBM $-1/0/+9$ selon le modèle statistique qui considère toute l'expérience de conduite mais n'utilise pas l'historique . 122

RÉSUMÉ

Ce mémoire fait une étude détaillée de la modélisation du nombre de réclamations en assurance automobile à l'aide des systèmes bonus-malus, méthode de tarification *a posteriori* utilisée par les actuaires pour déterminer la prime des assurés en fonction de leur expérience sinistre. Deux approches de calibration des systèmes bonus-malus sont proposées dans le cadre du mémoire. L'estimation des primes relatives d'un système bonus-malus selon l'approche classique passe par deux étapes distinctes : l'estimation des paramètres d'une distribution de l'hétérogénéité lors de la tarification *a priori*, et ensuite l'approximation de l'hétérogénéité par un système bonus-malus. Une nouvelle approche d'estimation d'un système bonus-malus en une seule étape est développée, en utilisant des outils statistiques. Cette approche statistique permet d'estimer les relativités bonus-malus directement à l'aide des modèles de régression en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Des critères statistiques classiques permettent ainsi de sélectionner le meilleur système bonus-malus alors que des métriques moins précises devraient être utilisées lors d'une calibration classique.

Mots-clés : Nombre de réclamations ; Tarification *a priori* ; Tarification *a posteriori* ; Systèmes bonus-malus ; Hétérogénéité ; Modèles de régression ; Maximum de vraisemblance.

INTRODUCTION

Ce mémoire fait une étude détaillée des systèmes bonus-malus utilisés pour modéliser le nombre de réclamations en assurance automobile. L'objectif du travail est de revoir les méthodes classiques, mais aussi de développer de nouvelles méthodes statistiques de calibration des systèmes bonus-malus, en supposant des distributions classiques de nombre de réclamations telles que les distributions de Poisson, binomiale négative et binomiale négative multivariée. Ainsi, une composante importante du projet est donc, d'utiliser et de construire des méthodes d'évaluation afin de comparer les systèmes bonus-malus d'un point de vue classique et statistique.

En assurance non-vie, la tarification *a priori* est une méthode de tarification utilisée par les assureurs pour mieux segmenter les différents risques assurables dans leur portefeuille d'assurance. Le but de cette méthode est d'utiliser les différentes caractéristiques des assurés afin de mieux classer les risques de façon à ce que les assurés appartenant à une même classe de risque payent la même prime. Toutefois, plusieurs caractéristiques des assurés ne peuvent pas être utilisées dans la segmentation, soit parce qu'elles ne sont pas mesurables, soit parce qu'elles sont difficilement justifiables socialement. Néanmoins, certaines de ces variables telles que l'agressivité au volant, les réflexes, la colère, la conduite sous l'effet de l'alcool, etc., ont un grand impact sur la fréquence de réclamation de l'assuré. Une conséquence à ce phénomène est que le portefeuille d'assurance est encore hétérogène malgré l'utilisation de plusieurs variables de tarification *a priori*. Afin de modéliser ces caractéristiques inconnues de chaque assuré, la modélisation bayésienne empirique est une alternative intéressante. En effet, un terme aléatoire est ajouté à la distribution de fréquence de réclamation pour modéliser les caractéristiques inconnues du risque. L'analyse *a posteriori* de ce terme aléatoire

permet d'ajuster la prime annuelle de l'assuré, révélant ainsi partiellement l'effet des caractéristiques non observées sur la fréquence de réclamation.

Parce qu'il arrive fréquemment que le développement théorique des distributions *a posteriori* et prédictives soit complexe et difficile à faire comprendre aux assurés, aux gestionnaires, etc., les actuaires ont développé d'autres méthodes pour estimer la prime des assurés. L'une des méthodes développées est la calibration des systèmes bonus-malus. Les systèmes bonus-malus offrent une approximation de la prime bayésienne tout en offrant l'avantage d'être facilement compris par un large public. Les systèmes bonus-malus classiques sont surtout utilisés en Europe alors que l'industrie québécoise de l'assurance se contente souvent d'une version simplifiée de la version européenne, qui peut être problématique au niveau théorique. Il serait donc tout à l'avantage des compagnies d'assurances québécoises d'utiliser ce type de système de tarification *a posteriori* afin de segmenter de manière plus efficace les risques assurables.

Plusieurs méthodes classiques ont été développées dans la littérature actuarielle afin d'estimer les relativités du système bonus-malus. Les relativités correspondent à un facteur multiplicatif à la prime de base déterminée lors de la tarification *a priori* afin d'estimer la prime des assurés. Comme méthodes, on peut citer entre autres, la méthode de (Norberg, 1976) qui se base sur un critère asymptotique ainsi que la méthode de (Borgan, Hoem et Norberg, 1981) qui se base quant à elle sur un critère non asymptotique. Toutes ces méthodes classiques ont un même but : estimer les paramètres de la distribution d'hétérogénéité du portefeuille et approximer l'hétérogénéité par un système bonus-malus.

Une composante importante dans la calibration des systèmes bonus-malus classiques consiste à évaluer la performance de ces systèmes afin de mesurer la qualité de prédiction des primes relatives estimées. Pour évaluer les systèmes bonus-malus clas-

siques, plusieurs métriques d'évaluation ont été développées dans la littérature actuarielle dont un résumé exhaustif sera fait dans le présent mémoire.

Après avoir passé en revue les différentes méthodes classiques d'estimation des relativités bonus-malus, on développe une nouvelle approche qui consiste à calibrer les systèmes bonus-malus en utilisant des outils statistiques. L'approche statistique permet d'estimer directement les relativités bonus-malus en utilisant des modèles de régression. Dans le cadre de l'approche statistique, les relativités sont estimées à l'aide de l'historique des réclamations passées des assurés, disponibles dans la base de données utilisée dans le cadre des applications aux différentes approches. Comme dans l'approche classique, plusieurs critères classiques statistiques sont utilisés afin d'évaluer statistiquement la performance des systèmes bonus-malus. L'approche statistique développée dans le cadre du mémoire sera comparée avec l'approche classique utilisée depuis des années.

CHAPITRE I

CONCEPTS PRÉALABLES

Avant de commencer, il convient de définir quelques concepts de base de l'assurance automobile tels que la tarification *a priori* et *a posteriori* ou encore les systèmes bonus-malus. Quelques exemples pratiques pour comprendre le concept des systèmes bonus-malus seront présentés. Par la suite, quelques notions de probabilités seront illustrées. Finalement, une description des données d'assurance utilisées dans le cadre du mémoire sera faite. Les différentes notions traitées dans ce chapitre sont basées principalement sur les ouvrages de (Denuit et al., 2007) ou de (Lemaire, 1995).

1.1 Assurance automobile

L'assurance est un contrat entre l'assureur et l'assuré où ce dernier, moyennant une prime, se protège contre la survenance d'un risque défini selon les clauses du contrat. En assurance automobile, l'assuré se protège contre toutes sortes de dommages matériels causés au véhicule assuré, et dommages corporels subis par le conducteur du véhicule. En fonction du type de contrat souscrit, l'assurance automobile peut également couvrir les dommages matériels ou corporels causés par le véhicule assuré à des tiers. Dans la plupart des pays du monde, l'assurance automobile est obligatoire pour tout véhicule qui circule sur une route publique (Lemaire, 1995). Par conséquent, les compagnies d'assurance disposent d'une grande quantité de données renseignant sur les assurés. De ce

fait, les actuaires font face au problème crucial de tarification adéquate des primes à attribuer aux assurés afin de refléter le risque réel qu'ils représentent dans les portefeuilles d'assurance.

1.2 Tarification *a priori*

La tarification *a priori* est une méthode de tarification utilisée par les actuaires afin de mieux segmenter les portefeuilles d'assurance. Cette méthode consiste à prédire le nombre espéré de réclamations en fonction des caractéristiques observables des assurés tels que l'âge, le sexe, le kilométrage, l'utilisation du véhicule, l'occupation, etc. Le but de la tarification *a priori* est de construire des classes de risque homogènes où les assurés appartenant à une même classe de risque paient la même prime. Une classe de risque peut être vue comme un ensemble de caractéristiques, où les assurés appartenant à une même classe de risque ont des caractéristiques observables identiques. Les caractéristiques observables des assurés sont appelées variables de classification ou variables *a priori*. En général, la classification *a priori* est faite à l'aide des modèles de régression ou modèles linéaires généralisés (GLM) développés par (Nelder et Wedderburn, 1972). Le but de la régression est d'analyser la relation qui existe entre la variable réponse et les variables explicatives. En assurance automobile, la variable réponse représente généralement le nombre de réclamations ou le coût des réclamations tandis que les variables explicatives représentent les variables de classification. Cette relation peut être exprimée comme une équation qui prédit la variable réponse à l'aide d'une fonction (combinaison linéaire) impliquant les variables explicatives et les paramètres servant à la prédiction. Lors de la tarification *a priori*, on modélise généralement le nombre de réclamations par les distributions de Poisson, binomiale négative, etc., tandis que le coût des réclamations est généralement modélisé par les distributions gamma, inverse-gaussienne, etc. Les techniques de classification des risques ont été le sujet de plusieurs articles issus de la littérature actuarielle. On peut citer entre autres, (Dionne et Vanasse, 1989) qui ont utilisé un modèle de régression binomiale négative et (Dean, Lawless et Willmot, 1989)

qui ont utilisé la distribution de Poisson-inverse gaussienne pour modéliser le nombre de réclamations.

1.3 Tarification *a posteriori*

Si toutes les caractéristiques influençant le nombre de réclamations pouvaient être mesurables et incorporées dans la tarification, les classes de risque seraient probablement homogènes. Les différences individuelles par rapport à la moyenne ne causeraient pas un réajustement de la prime. Malheureusement, plusieurs des caractéristiques des assurés ne peuvent être prises en compte dans la tarification *a priori* soit parce qu'elles ne sont pas observables, soit parce qu'elles sont difficilement mesurables. On peut citer entre autres l'agressivité au volant, les réflexes, la conduite sous l'effet de l'alcool, etc. Il est bien connu que ces variables cachées peuvent avoir un impact significatif sur le nombre de réclamations des assurés (Denuit et al., 2007). Par conséquent, le portefeuille est encore hétérogène malgré l'utilisation de plusieurs variables de classification dans la tarification *a priori*. Pour cette raison, les actuaires utilisent une méthode de tarification basée sur l'expérience sinistre des assurés. Connu sous le nom de tarification *a posteriori*, c'est une méthode utilisée par les actuaires afin de tenir compte des différences individuelles de chaque assuré dans le portefeuille. Cette méthode consiste à modéliser l'hétérogénéité du portefeuille à l'aide d'un effet aléatoire. L'analyse *a posteriori* de cet effet aléatoire en fonction du nombre de réclamations de l'assuré permet de réévaluer la prime *a priori* afin de refléter le risque réel que représente l'assuré. L'utilisation de l'historique des réclamations pour ajuster la prime de l'assuré vient du fait qu'il est bien connu que le meilleur prédicteur du nombre d'accidents futurs que l'assuré déclarera n'est pas l'âge ou le type de véhicule mais le nombre d'accidents passés qu'il a déclarés (Denuit et al., 2007).

1.4 Bonus-malus

Les actuaires utilisent plusieurs systèmes ou concepts mathématiques afin de déterminer la prime des assurés en fonction de leur expérience sinistre. Ces systèmes de tarification *a posteriori* pénalisent les assurés responsables d'un ou plusieurs accidents déclarés par des surcharges (majorations ou malus) et récompensent les assurés n'ayant pas eu de réclamations par des escomptes (rabais ou bonus). D'un point de vue des assurés, il n'est pas toujours clair de la façon dont l'assureur détermine les rabais et majorations en fonction de leur historique de sinistre. Pour cette raison, les actuaires ont développé de nouvelles méthodes de tarification *a posteriori* connu sous le nom de système bonus-malus en Europe. Le but de ce système est de déterminer de manière adéquate mais aussi de manière à être compris d'un large public (comme les assurés ainsi que des gens dans la compagnie tels que les agents, les courtiers, les administrateurs, les dirigeants, etc.), le montant de prime à allouer à chaque assuré en fonction de son historique de réclamations.

1.4.1 Définition

Un système bonus-malus peut se voir comme une méthode de tarification basée exclusivement sur le nombre de sinistres déclarés par l'assuré, même si la sévérité des réclamations pourrait aussi être théoriquement utilisée. C'est une forme de tarification *a posteriori* qui corrige la tarification *a priori* en ajustant l'information des critères de classification des risques. Les systèmes bonus-malus correspondent à un système à classes dans lesquels les assurés grimpent ou descendent d'un certain niveau en fonction du nombre de sinistres déclarés ou du nombre d'années d'assurance sans réclamation. Un système bonus-malus à classes se présente comme dans le tableau 1.1. Le niveau 1 est celui avec la plus petite relativité tandis que le niveau s est celui avec la plus grande relativité. La prime payée par l'assuré est égale au produit d'une prime de base prédéterminée selon les règles de tarification *a priori* et de la relativité correspondant au niveau occupé par l'assuré dans l'échelle bonus-malus. Un degré de l'échelle est prévu

pour un nouvel assuré. Un réajustement de la position de l'assuré sur cette échelle est effectué annuellement en fonction de la sinistralité de cet assuré conformément aux règles de transition du système. Les pénalités induites par un système bonus-malus à classes ne dépendent que du nombre d'accidents déclarés par l'assuré. De plus, le niveau qu'occupera l'assuré dans le système bonus-malus à l'année $t + 1$ ne dépend que du niveau qu'il occupait durant l'année t et du nombre de sinistres déclarés durant l'année t .

Le coût des réclamations n'est pas considéré dans un SBM pour plusieurs raisons :

1. parce que les sinistres graves prennent plus de temps à être réglés et que la prime doit être calculée à chaque année en fonction du nombre de sinistres déclarés par l'assuré ;
2. les montants payés dépendent trop du hasard et non du nombre de réclamations de l'assuré.

Après la tarification *a priori* dont l'idée est de séparer les contrats en plusieurs catégories homogènes à l'aide des caractéristiques observables des assurés, la calibration d'un système bonus-malus passe par 2 grandes étapes :

1. la première étape consiste à modéliser l'hétérogénéité représentant le niveau de risque inconnu de l'assuré (différentes variables de classification ne pouvant être utilisées dans la tarification *a priori*) par une loi de probabilité ;
2. la seconde étape consiste à approximer l'hétérogénéité par un système bonus-malus.

1.4.2 Exemples

Voici des exemples fictifs pour montrer le fonctionnement d'un système bonus-malus. On définit le SBM par une échelle $-y/+x$, signifiant qu'en fonction de son niveau de début de période, l'assuré descend de y niveaux en cas d'année d'assurance sans réclamation tandis qu'il grimpe de x niveaux à chaque sinistre déclaré. Voici 2 exemples illustratifs :

Tableau 1.1: Système bonus-malus à classes

Niveau	Prime relative	Prime
s	r_s	b_s
.	.	.
.	.	.
l	r_l	$b_l = r_l \times \text{PB}$
.	.	.
.	.	.
1	r_1	b_1

1. Soit un système à 6 niveaux de 1 à 6 avec une échelle $-1/+6$ ou $-1/\text{TOP}$. Le niveau 1 correspond au niveau le plus bas tandis que le niveau 6 correspond au niveau maximal. L'échelle $-1/\text{TOP}$ signifie qu'en fonction du niveau où se situait l'assuré au début de la période de couverture, s'il n'a pas eu de réclamation, il descend d'un niveau et dès qu'il a au moins une réclamation, il grimpe au plus haut niveau du système, celui avec la relativité maximale. Le tableau 1.2 illustre le fonctionnement de ce système bonus-malus $-1/\text{TOP}$.
2. Soit un système à 6 niveaux de 1 à 6 avec une échelle $-1/+2$. L'échelle $-1/+2$ signifie qu'en fonction du niveau où se situait l'assuré au début de la période de couverture, s'il n'a pas eu de réclamation, il descend d'un niveau; à chaque réclamation, il grimpe de 2 niveaux. Le tableau 1.3 illustre le fonctionnement de ce système bonus-malus $-1/+2$.

1.5 Notions de probabilités et de statistique

1.5.1 Distributions

En se limitant à la modélisation de la sinistralité, plusieurs distributions sont proposées dans la littérature scientifique pour modéliser le nombre de réclamations.

Tableau 1.2: Règles de transition d'un SBM à 6 niveaux avec échelle -1/TOP

Niveau de départ	Niveau après k réclamations	
	k = 0	k ≥ 1
1	1	6
2	1	6
3	2	6
4	3	6
5	4	6
6	5	6

Dans le cadre de ce mémoire, trois distributions sont utilisées pour la modélisation : les distributions de Poisson, binomiale négative et binomiale négative multivariée. La distribution binomiale négative multivariée est utilisée pour modéliser la dépendance qui peut exister entre les contrats d'un même assuré à l'aide des données de panel ou données longitudinales. Le but de cette distribution est donc de modéliser la distribution conjointe du nombre de réclamations issues de chacun des contrats d'un même assuré.

1. La loi de Poisson

L'une des premières distributions à être utilisée pour modéliser le nombre de réclamations $N_{i,t}$ de l'assuré i au temps t est la distribution de Poisson. La loi de Poisson est bien connue comme un cas limite de la loi binomiale de paramètres (n, p) lorsque n est grand et $\frac{p}{n} \rightarrow \lambda$ pour $p \in (0, 1)$. La fonction de probabilité, l'espérance et la variance d'une loi de Poisson sont :

$$\Pr[N_{i,t} = n_{i,t}] = \frac{(\lambda_{i,t})^{n_{i,t}} \exp(-\lambda_{i,t})}{n_{i,t}!} \quad \text{pour } n_{i,t} = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$E[N_{i,t}] = \lambda_{i,t} \quad , \quad \text{Var}[N_{i,t}] = \lambda_{i,t} \quad ,$$

Tableau 1.3: Règles de transition d'un SBM à 6 niveaux avec échelle -1/+2

Niveau de départ	Niveau après k réclamations			
	k = 0	k = 1	k = 2	k ≥ 3
1	1	3	5	6
2	1	4	6	6
3	2	5	6	6
4	3	6	6	6
5	4	6	6	6
6	5	6	6	6

où $\lambda_{i,t} = g(X'_{i,t}\beta)$, appelé fonction de lien canonique, indique comment la moyenne du nombre de réclamations $\lambda_{i,t}$ est reliée linéairement avec les variables explicatives $X_{i,t}$. Dans un modèle de régression standard (loi normale), on utilise $\lambda_{i,t} = X'_{i,t}\beta$. Ce lien est généralisé par $\lambda_{i,t} = g(X'_{i,t}\beta)$ pour les GLM (*Generalized Linear Models*), où g est monotone et dérivable (tel que la racine carrée, la fonction exponentielle, etc.). Dans le cas d'un modèle de Poisson, $\lambda_{i,t} = g(X'_{i,t}\beta) = \exp(X'_{i,t}\beta)$. Donc, $X'_{i,t}\beta = \ln(\lambda_{i,t})$; on appelle ce lien, le lien logarithmique (lien canonique pour la distribution de Poisson). D'autres liens peuvent être utilisés comme le lien logit pour la loi binomiale, le lien identité pour la loi normale, etc. De ce fait, la moyenne du nombre de réclamations d'un modèle de Poisson est définie comme $\lambda_{i,t} = \exp(X'_{i,t}\beta)$. Pour plus d'informations sur les détails techniques de la distribution de Poisson, on peut se référer à l'ouvrage de (Denuit et al., 2007).

Par contre, il est bien connu que la distribution de Poisson possède certaines limites comme la propriété d'équidispersion, c'est-à-dire la variance égale à l'espérance (Gourieroux, 1999). Pour corriger ces désavantages de la loi de Poisson, la distribution de binomiale négative est une alternative.

2. Distributions Poisson mélange

L'ajustement des données d'assurance à l'aide de la distribution de Poisson est souvent de mauvaise qualité. Cela est principalement dû à l'hétérogénéité qui est présent dans le portefeuille : le comportement des conducteurs varie d'un individu à un autre. Par conséquent, il est donc utile de multiplier la moyenne λ de la distribution de Poisson par un effet aléatoire positif Θ . La moyenne variera donc dans le portefeuille en fonction de la variable aléatoire Θ . Évidemment, on choisira Θ tel que $E[\Theta] = 1$ parce qu'on veut obtenir en moyenne, la fréquence de réclamation λ . En terme mathématique, conditionnellement à Θ , on a :

$$\Pr[N = k | \Theta = \theta] = p(k | \lambda, \theta) = \exp(-\lambda \theta) \frac{(\lambda \theta)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Le but de l'utilisation de ce modèle vient du fait que tous les assurés du portefeuille n'ont pas la même fréquence de réclamation λ . Certains ont une fréquence de réclamation plus élevée ($\lambda \theta$ avec $\theta \geq 1$) tandis que d'autres ont une fréquence de réclamation moins élevée ($\lambda \theta$ avec $\theta \leq 1$). De ce qui précède, la probabilité qu'un assuré, pris aléatoirement dans le portefeuille, déclare k accidents à la compagnie est déterminée en faisant une moyenne pondérée des probabilités conditionnelles définies précédemment. Elle est de la forme suivante :

$$\Pr[N = k] = E[p(k | \lambda, \theta)] = \int_0^\infty \exp(-\lambda \theta) \frac{(\lambda \theta)^k}{k!} f_\Theta(\theta) d\theta,$$

où $f_\Theta(\theta)$ représente la distribution de l'hétérogénéité encore appelée fonction de structure. Ce modèle suppose que la fréquence de réclamation moyenne d'un assuré ne change pas dans le temps mais permet à certains assurés d'avoir des fréquences de réclamation plus élevées que d'autres. Plusieurs auteurs ont utilisé les distributions de Poisson mélange comme (Franklin, 2005) ou (Klugman, Panjer et Willmot, 2004) qui ont publié des articles sur l'inférence statistique appliquée sur les données de comptage. (Kendall et Stuart, 1977) et (Feller, 1971) quant à eux, se sont intéressés aux fonctions génératrices de ces distributions. Les modèles

de mélange ont aussi été discutés dans (Lindsay, 1995). Les distributions binomiale négative et binomiale négative multivariée sont des distributions Poisson-mélange.

– La loi binomiale négative

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour construire la distribution binomiale négative mais la plus intuitive est l'introduction d'un effet aléatoire appelé hétérogénéité, de moyenne 1 et de variance α , dans la moyenne de la distribution de Poisson. En notant cette variable Θ , et en supposant qu'elle suit une loi gamma ayant la fonction de densité :

$$f(\theta) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} \exp(-\alpha\theta) \quad , \quad \theta > 0,$$

alors cette distribution mélange équivaut à une distribution binomiale négative. Plusieurs auteurs tels que (Greenwood et Yule, 1920) ou (Lawless, 1987) et (Dionne et Vanasse, 1989) ont utilisé cette distribution pour applications avec les données d'assurance. La fonction de probabilité, l'espérance et la variance d'une loi binomiale négative sont :

$$\begin{aligned} \Pr[N_{i,t} = n_{i,t}] &= \int_0^\infty \Pr[N_{i,t} = n_{i,t} | \Theta = \theta] f_\Theta(\theta) d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda_{i,t}\theta)^{n_{i,t}} \exp(-\lambda_{i,t}\theta)}{n_{i,t}!} f(\theta) d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda_{i,t}\theta)^{n_{i,t}} \exp(-\lambda_{i,t}\theta)}{n_{i,t}!} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} \exp(-\alpha\theta) d\theta \\ &= \frac{\alpha^\alpha \lambda_{i,t}^{n_{i,t}}}{n_{i,t}! \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \exp[-\theta(\alpha + \lambda_{i,t})] \theta^{n_{i,t} + \alpha - 1} d\theta \\ &= \frac{\alpha^\alpha \lambda_{i,t}^{n_{i,t}}}{\Gamma(n_{i,t} + 1) \Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(n_{i,t} + \alpha)}{(\alpha + \lambda_{i,t})^\alpha + n_{i,t}}. \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \Pr[N_{i,t} = n_{i,t}] &= \frac{\Gamma(n_{i,t} + \alpha)}{\Gamma(n_{i,t} + 1) \Gamma(\alpha)} \left(\frac{\lambda_{i,t}}{\lambda_{i,t} + \alpha} \right)^{n_{i,t}} \left(\frac{\alpha}{\lambda_{i,t} + \alpha} \right)^\alpha \\ E[N_{i,t}] &= \lambda_{i,t} \quad , \quad \text{Var}[N_{i,t}] = \lambda_{i,t} + \frac{\lambda_{i,t}^2}{\alpha} \quad , \end{aligned}$$

pour $n_{i,t} = 0, 1, 2, 3, \dots$ et où $\lambda_{i,t} = \exp(x'_{i,t}\beta)$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{\alpha-1}dt$. Pour s'assurer que la moyenne de l'hétérogénéité soit égale à 1, les 2 paramètres de la gamma ont été choisis égaux à α . Cette distribution est aussi appelée la NB2 dans la littérature scientifique (Boucher, Denuit et Guillén, 2007). Il est à noter que la distribution binomiale négative peut être écrite sous plusieurs formes. (Cameron et Trivedi, 1986) propose un modèle généralisé de la distribution binomiale négative ayant la même moyenne $\lambda_{i,t}$, mais avec une variance de la forme $\lambda_{i,t} + \alpha\lambda_{i,t}^p$. Il existe plusieurs autres méthodes pouvant être utilisées pour modéliser l'hétérogénéité, comme l'hétérogénéité inverse gaussienne qui conduit à une forme fermée (voir (Holla, 1966) ou (Willmot, 1987), (Dean, Lawless et Willmot, 1989) et (Tremblay, 1992)). Une autre distribution importante de l'hétérogénéité est la distribution lognormale (Hinde, 1982) mais une représentation de la densité est impossible ; cette distribution de fréquence nécessite des calculs numériques (Boucher, Denuit et Guillén, 2007).

– La loi binomiale négative multivariée

Un autre modèle pour les données de comptage tenant compte de l'hétérogénéité est la binomiale négative multivariée, encore appelée négative multinomiale. Cette distribution n'est rien d'autre qu'une version généralisée de la loi binomiale négative bivariée (Marshall et Olkin, 1990). Afin de tenir compte de la dépendance qui peut exister entre les contrats d'un même assuré durant toutes ses périodes couvertes, on introduit dans le paramètre de moyenne une variable aléatoire θ_i représentant l'hétérogénéité individuelle. Ainsi, en supposant que le nombre de réclamations $N_{i,t}|\theta_i$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_{i,t}\theta_i$, où θ_i suit une loi gamma de moyenne 1 et de variance $\frac{1}{\alpha}$, on obtient une binomiale négative multivariée. La fonction de probabilité, l'espérance et la variance de cette distribution sont (Hausman, Hall et Griliches, 1984) :

$$\begin{aligned}
& \Pr[N_{i,1} = n_{i,1}, \dots, N_{i,T} = n_{i,T}] \\
&= \int_0^\infty \Pr[N_{i,1} = n_{i,1}, \dots, N_{i,T} = n_{i,T} | \Theta_i = \theta_i] f(\theta_i) d\theta_i \\
&= \int_0^\infty \prod_{t=1}^T \left[\frac{(\lambda_{i,t} \theta_i)^{n_{i,t}} \exp(-\lambda_{i,t} \theta_i)}{n_{i,t}!} \right] f(\theta_i) d\theta_i \\
&= \int_0^\infty \prod_{t=1}^T \left[\frac{(\lambda_{i,t} \theta_i)^{n_{i,t}} \exp(-\lambda_{i,t} \theta_i)}{n_{i,t}!} \right] \times \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta_i^{\alpha-1} \exp(-\alpha \theta_i) d\theta_i \\
&= \left[\prod_{t=1}^T \frac{(\lambda_{i,t})^{n_{i,t}}}{n_{i,t}!} \right] \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \times \int_0^\infty \exp[-\theta_i(\alpha + \sum_{t=1}^T \lambda_{i,t})] \theta_i^{\alpha + \sum_{t=1}^T n_{i,t} - 1} d\theta_i \\
&= \left[\prod_{t=1}^T \frac{(\lambda_{i,t})^{n_{i,t}}}{n_{i,t}!} \right] \times \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^T n_{i,t})}{(\alpha + \sum_{t=1}^T \lambda_{i,t})^{\alpha + \sum_{t=1}^T n_{i,t}}}.
\end{aligned}$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned}
\Pr[N_{i,1} = n_{i,1}, \dots, N_{i,T} = n_{i,T}] &= \left[\prod_{t=1}^T \frac{(\lambda_{i,t})^{n_{i,t}}}{n_{i,t}!} \right] \frac{\Gamma(\sum_{t=1}^T n_{i,t} + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \times \\
&\left(\frac{\alpha}{\sum_{t=1}^T \lambda_{i,t} + \alpha} \right)^\alpha \times \left(\sum_{t=1}^T \lambda_{i,t} + \alpha \right)^{-\sum_{t=1}^T n_{i,t}} \quad \text{pour } n_{i,t} = 0, 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

$$E[N_{i,t}] = \lambda_{i,t} \quad , \quad \text{Var}[N_{i,t}] = \lambda_{i,t} + \frac{\lambda_{i,t}^2}{\alpha} \quad ,$$

où $\lambda_{i,t} = \exp(x'_{i,t}\beta)$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{\alpha-1}dt$.

1.5.2 Estimateurs du maximum de vraisemblance

Pour estimer les paramètres d'un modèle à l'aide des données, plusieurs méthodes d'estimation peuvent être utilisées. L'une des méthodes d'estimation les plus connues est la méthode du maximum de vraisemblance. C'est une méthode d'estimation et d'inférence des modèles paramétriques. Soient X_1, X_2, \dots, X_n , des variables aléatoires

indépendantes et identiquement distribuées ayant une fonction de densité discrète ou continue $f(x_i|\theta)$ où θ représente le paramètre d'intérêt. Soit $L(\theta|X)$, la fonction de vraisemblance qui peut être vue comme la chance d'observer les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n pour la valeur du paramètre d'intérêt ; elle est définie par :

$$L(\theta|X) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ est la valeur $\hat{\theta}$ qui maximise la fonction de vraisemblance c'est-à-dire :

$$L(\hat{\theta}) \geq L(\theta), \quad \forall \theta.$$

Il est souvent plus pratique mathématiquement de trouver le maximum du logarithme de la fonction de vraisemblance soit :

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i|\theta),$$

au lieu d'utiliser la fonction de vraisemblance elle-même. La fonction $l(\theta)$ est appelée la log-vraisemblance. Puisque le logarithme est une transformation monotone, la log-vraisemblance sera maximisée à la même valeur du paramètre qui maximise la fonction de vraisemblance. L'estimateur par maximum de vraisemblance (EMV) possède plusieurs propriétés intéressantes :

1. Invariance : si h est une fonction monotone et $\hat{\theta}$ est l'EMV, alors $h(\hat{\theta})$ est l'EMV de $h(\theta)$;
2. Asymptotiquement sans biais : $E(\hat{\theta})$ approche θ lorsque l'échantillon grandit ;
3. Convergent : la distribution de $\hat{\theta}$ approche θ lorsque l'échantillon grandit ;
4. Variance minimale : parmi tous les estimateurs, pour un grand échantillon, l'EMV possède la variance minimale et est donc le plus précis (Denuit et al., 2007).

1.5.3 Critères d'information

L'utilisation de la log-vraisemblance dont le but est de la maximiser est en général assez suffisante pour comparer 2 ou plusieurs modèles ayant le même nombre de pa-

ramètres estimés. Par contre, lorsqu'on augmente le nombre de paramètres, l'ajustement des données est amélioré et même si un paramètre ajouté est significatif, il peut conduire à une perte de précision. De ce fait, plusieurs mesures statistiques ont été proposées pour comparer l'adéquation des modèles ayant un nombre différent de paramètres. Parmi ces mesures, les critères classiques tels que l'AIC (*Akaike Information Criteria*) et le BIC (*Bayesian Information Criteria*) sont les plus utilisés en pratique. Tel que montré par (Kuha, 2004), le but de l'AIC est de minimiser la distance entre le modèle testé et le vrai modèle. Le but du BIC quant à lui, est d'identifier le modèle ayant la plus grande probabilité d'être vrai, sachant que l'un des modèles testés est vrai. Les formules de l'AIC et du BIC sont de la forme :

$$AIC = -2 \times l + 2 \times p$$

$$BIC = -2 \times l + p \times \ln(n),$$

où l , p et n représentent la log-vraisemblance, le nombre de paramètres et le nombre d'observations respectivement. Le modèle ayant le plus petit AIC ou BIC serait le meilleur modèle parmi ceux testés. Selon (Burnham et Anderson, 2002), deux modèles sont significativement différents si la différence dans leur log-vraisemblance est supérieure à 5, ce qui équivaut à une différence de plus de 10 en ce qui a trait à l'AIC. (Raftery, 1995) quant à lui, suggère qu'un modèle performe mieux qu'un autre modèle si la différence dans leur BIC respectif excède 5. Plusieurs autres critères statistiques ont été proposés dans la littérature statistique pour comparer des modèles ; on peut se référer à (Kuha, 2004) pour plus d'information.

1.5.4 Déviance

La déviance est une mesure statistique qui permet de tester la qualité d'ajustement faite sur les données utilisées. Elle mesure la distance entre le modèle saturé et le modèle ajusté. Le modèle saturé est un modèle qui contient autant de paramètres

que d'observations de telle sorte que les données sont ajustées parfaitement. Le modèle ajusté quant à lui, est un modèle avec peu de paramètres utilisé pour ajuster les données. Si le modèle ajusté permet de résumer les données aussi bien que le modèle saturé, il serait alors avantageux d'utiliser ce modèle avec peu de paramètres. La déviance notée D équivaut à un test de rapport de vraisemblance du modèle ajusté contre le modèle saturé ; elle est définie comme :

$$D = -2 \times \ln \left(\frac{L(\hat{\mu})}{L(k)} \right) = 2 \left(\ln L(k) - \ln L(\hat{\mu}) \right),$$

où $L(k)$ est la vraisemblance du modèle saturé avec k la moyenne du modèle égale à la valeur observée et $L(\hat{\mu})$, la vraisemblance du modèle ajusté avec $\hat{\mu}$, la moyenne du modèle calculée à l'aide des paramètres estimés. D est approximativement de loi χ^2_{n-p} où n et p sont le nombre d'observations et le nombre de paramètres estimés respectivement. En supposant α le seuil du test, le modèle ajusté est de mauvaise qualité si :

$$D_{obs} > \chi^2_{n-p, 1-\alpha}.$$

1.5.5 Test de Wald

Le test de Wald est un test classique utilisé pour tester l'hypothèse nulle $H_0 : \beta_j = 0$, où β_j représente le paramètre d'intérêt à tester aussi appelé coefficient de régression. En définissant $\sum_{\hat{\beta}}$, la matrice de variance-covariance des estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{\beta}$ d'un vecteur de régression β et que le nombre d'observations est suffisamment grand, la distribution de ces estimateurs est de loi normale $N(0, \sum_{\hat{\beta}})$. En terme mathématique, en notant T , la statistique du test, T est de la forme suivante :

$$T = \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}},$$

où $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}$ représente l'écart-type de $\hat{\beta}_j$ et T suit approximativement une $N(0, 1)$ sous l'hypothèse H_0 . Si le test rejette l'hypothèse nulle, cela voudrait dire que la j^e variable

explicative a un impact significatif sur la variable réponse. Une autre alternative du test de Wald est d'utiliser les intervalles de confiance en se basant sur l'hypothèse de normalité. De ce fait, un intervalle de confiance des paramètres β_j est défini comme :

$$\left[\hat{\beta}_j - z_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}, \hat{\beta}_j + z_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} \right],$$

où $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}^2$ représente la variance de $\hat{\beta}_j$ donnée par l'élément (j, j) de la matrice $\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}}$.

1.6 Données utilisées

Toutes les méthodes d'estimation des relativités à l'aide des systèmes bonus-malus sont appliquées sur les données provenant d'une compagnie d'assurance automobile opérant au Canada. La compagnie dispose de plusieurs types de couverture d'assurance mais seulement les données issues de la couverture collision sont considérées dans l'étude. De plus, seulement les véhicules de type promenade (*Private Passengers*) sont utilisés pour la modélisation. Dans le cadre du mémoire, un échantillon aléatoire contenant 167019 observations a été utilisé. Cet échantillon dispose de l'information sur les polices d'assurés sur une période de 5 ans allant de 2003 à 2007 avec un historique de sinistres pouvant aller jusqu'à un maximum de 10 ans passés. Pour chaque police, l'information sur les caractéristiques des assurés ainsi que leur nombre de réclamations survenues durant la période couverte sont disponibles. Le nombre de réclamations totales servant à l'estimation des différents paramètres du modèle est utilisé indépendamment du caractère responsable ou non de l'accident déclaré. Toutefois, l'historique des réclamations responsables et non responsables allant jusqu'à un maximum de 10 ans passés, est utilisé pour calculer les niveaux bonus-malus de chaque assuré dans la base de données.

1.6.1 Statistiques de base

Le tableau 1.4 résume les différentes statistiques importantes sur la base de données utilisée pour la modélisation du nombre de réclamations à l'aide des systèmes bonus-malus. Les valeurs entre parenthèses dans le tableau représentent la fréquence de réclamation moyenne. Les nombres N , N^F et N^{Fc} dans le tableau représentent le nombre de réclamations totales, responsables et non responsables respectivement. La fréquence de réclamation moyenne totale pour la couverture collision ou responsabilité civile dans le portefeuille est de 6.6 %. Elle est équivalente à la somme des fréquences de réclamation responsable et non responsable. Une analyse du tableau indique qu'au fur et à mesure que l'année augmente, le nombre de réclamations diminue. La baisse drastique du nombre d'expositions observées durant l'année 2007 s'explique surtout par la structure de la base de données utilisée. Cette dernière est basée sur le fait qu'il y a plusieurs unités acquises dont la période de couverture commence au cours de l'année 2007 et finit au cours de l'année 2008. Ces portions d'unités acquises de 2008 n'ont pas été prises en compte dans la base de données étudiée, ce qui fait que le nombre de sinistres durant cette période n'a pas été comptabilisé.

Une variable de tarification importante à considérer dans la modélisation du nombre de réclamations à l'aide des systèmes bonus-malus est le nombre d'années de détention du permis de conduire. En effet, il est très bien connu que l'expérience de conduite des assurés a un impact significatif sur leur nombre de réclamations (Denuit et al., 2007). La figure 1.1 présente la distribution de la fréquence de réclamations totales en fonction du nombre d'années depuis l'obtention du permis de conduire dans le portefeuille. Une analyse de la figure indique que plus l'expérience de conduite augmente, plus la fréquence de réclamations totales diminue. La fréquence de réclamations totales semble ensuite augmenter à partir de 73 ans avant de redescendre à 0. Donc les jeunes conducteurs ont tendance à réclamer plus que les vieux conducteurs ; il faudrait en tenir compte dans la modélisation.

Tableau 1.4: Statistiques descriptives résumant le nombre de réclamations du portefeuille

Année	Nombre d'observations	Nombre d'expositions	Nombre N	Nombre N^F	Nombre N^{Fc}
2003	33473	30521	2132 (7,0%)	916 (3,0%)	1216 (4,0%)
2004	34772	32081	2103 (6,6%)	959 (3,0%)	1144 (3,6%)
2005	34090	31257	1960 (6,3%)	822 (2,6%)	1138 (3,6%)
2006	32846	30197	1996 (6,6%)	895 (3,0%)	1101 (3,6%)
2007	31838	15455	1010 (6,5%)	409 (2,6%)	601 (3,9%)
Total	167019	139510	9201 (6,6%)	4001 (2,9%)	5200 (3,7%)

1.6.2 Disposition des données

Les données disponibles en assurance peuvent avoir plusieurs structures qui sont récoltées et enregistrées de diverses manières dépendamment de l'assureur. Les données généralement rencontrées dans le domaine de l'assurance automobile sont des données transversales. Ce sont des données unidimensionnelles qui renseignent principalement sur les différentes caractéristiques des assurés, leur expérience sinistre ainsi que toute autre information reliée à l'assuré nécessaire à la tarification de sa prime. Elles sont généralement utilisées pour étudier les différences qui peuvent exister entre les risques assurables. Les données de panel ou longitudinales sont une autre structure de données d'assurance très utilisée de nos jours à cause de la disponibilité de très longues périodes d'assurance reliées à un même assuré. Elles sont utiles pour modéliser la dépendance pouvant exister entre les observations d'un même assuré, ce qui peut être donc très utile dans la modélisation du nombre de réclamations totales à l'aide des systèmes bonus-malus. Pour plus d'information sur l'application des données de panel, on peut se référer à l'ouvrage de (Frees, 2004) qui s'est intéressé à l'analyse et l'application de ces données dans le domaine des sciences sociales.

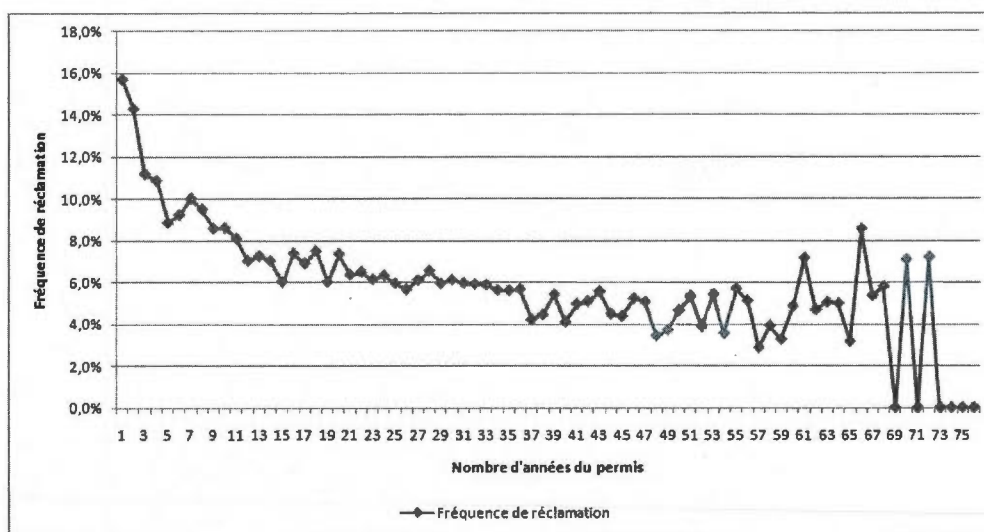


Figure 1.1: Distribution de la fréquence de réclamations totales en fonction du nombre d'années de détention du permis de conduire

1.7 Systèmes de tarification *a priori* et *a posteriori* utilisées par la compagnie

Le système de tarification utilisé par la compagnie d'assurance est basé sur un système à classes et de dossiers auxquels les assurés s'identifient en fonction de leurs caractéristiques lors d'une nouvelle affaire avec la compagnie ou d'un renouvellement de la police. Les classes sont composées des différentes caractéristiques observables des assurés comme le sexe, l'âge de l'assuré, l'âge du véhicule, l'état civil, la propriété de la maison de l'assuré. Les dossiers sont composés des différentes règles d'identification des assurés en fonction de leur ancienneté, c'est-à-dire le nombre d'années de détention du permis de conduire ainsi que leur historique de réclamation tels que le nombre de sinistres déjà occasionnés ou le nombre d'infractions commises. De manière globale, le système de la compagnie inclut à la fois les caractéristiques *a priori* et *a posteriori* des assurés. Le système bonus-malus pourrait être une alternative intéressante à ce système d'autant plus qu'il permettrait à chaque assuré de s'identifier à une classe, un bonus ou

un malus en fonction de son expérience sinistre.

CHAPITRE II

CALIBRATION DES SYSTÈMES BONUS-MALUS - APPROCHE CLASSIQUE

Les relativités d'un système bonus-malus sont estimées en fonction des règles de transition prédéterminées dans le système, ainsi qu'à partir de la matrice de probabilité de transition. Plusieurs méthodes d'estimation des relativités bonus-malus peuvent être utilisées afin de prédire la prime de l'assuré en fonction de son expérience sinistre. En se basant sur le livre de (Denuit et al., 2007), les méthodes classiques utilisées dans le cadre du mémoire sont la méthode de (Norberg, 1976) basée sur un critère asymptotique de la distribution des assurés dans l'échelle bonus-malus ainsi que la méthode de (Borgan, Hoem et Norberg, 1981) basée quant à elle, sur un critère non asymptotique de cette distribution.

La première partie du chapitre traite des différentes notions de base relatives à un système bonus-malus. Par la suite, on développe les différentes formes de relativités bonus-malus selon les méthodes asymptotique et non asymptotique. Les métriques d'évaluation des systèmes bonus-malus servant à évaluer la qualité de prédiction des primes relatives attribuées aux assurés seront ensuite discutées. Enfin, les résultats obtenus de l'application aux différentes méthodes classiques sur les données d'assurance utilisées seront présentés.

2.1 Notions de base

2.1.1 Règles de transition

La probabilité d'un assuré de passer d'un niveau à un autre du SBM dépend des règles de transition prédéterminées dans le système. En supposant que k accidents ont été rapportés par l'assuré, les règles de transition qui permettent le transfert de l'assuré d'un niveau à un autre sont définies de la manière suivante :

$$t_{ij}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si l'assuré est transféré du niveau } i \text{ au niveau } j \\ 0 & \text{autrement .} \end{cases}$$

Les composantes $t_{ij}(k)$ peuvent être exprimées en terme d'une matrice $T(k)$ de la forme :

$$T(k) = \begin{pmatrix} t_{11}(k) & t_{12}(k) & \cdots & t_{1s}(k) \\ t_{21}(k) & t_{22}(k) & \cdots & t_{2s}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{s1}(k) & t_{s2}(k) & \cdots & t_{ss}(k) \end{pmatrix},$$

où $T(k)$ est une matrice composée de valeurs 0 ou 1, ayant exactement un 1 sur chaque ligne et où s représente le niveau maximal du SBM. Voici un exemple qui illustre le concept des règles de transition d'un système bonus-malus à 6 niveaux allant de 1 à 6 avec une échelle -1/TOP. Rappelons que l'échelle -1/TOP signifie qu'en fonction du niveau où se situait l'assuré au début de la période de couverture, s'il n'a pas eu de réclamation, il descend d'un niveau et dès qu'il a au moins une réclamation, il grimpe au plus haut niveau du système, le niveau 6. Les matrices $T(0)$ et $T(1)$ illustrent la

trajectoire d'un assuré dans les niveaux de ce système bonus-malus :

$$T(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $T(k) = T(1)$ pour $k \geq 2$. La première ligne de la matrice $T(0)$ signifie que l'assuré est au niveau 1 en début de période ; s'il n'a pas eu de réclamation, il reste au niveau 1 étant donné que le niveau 1 est le niveau minimal du SBM, donc $t_{11}(0) = 1$ et $t_{1j}(0) = 0$ pour $j \geq 2$. La troisième ligne de la matrice $T(0)$ signifie que l'assuré est au niveau 3 en début de période ; s'il n'a pas eu de réclamation, il descend d'un niveau de moins correspondant au niveau 2, donc $t_{32}(0) = 1$ et $t_{3j}(0) = 0$ pour $j \neq 2$. En ce qui a trait à la matrice $T(1)$, dès que l'assuré a au moins une réclamation, il monte au plus haut niveau qui est le niveau 6, donc $t_{i6}(k) = 1$ et $t_{ij}(k) = 0$ pour $k \geq 1$, $1 \leq i \leq 6$ et $j \neq 6$.

2.1.2 Matrice de probabilités de transition

L'estimation des relativités bonus-malus passe par la détermination de la proportion des assurés dans les niveaux de l'échelle bonus-malus. Cette proportion est calculée à l'aide de la matrice de probabilités de transition. Cette matrice de transition définit principalement la probabilité que l'assuré se retrouve aux différents niveaux de l'échelle bonus-malus après une période donnée. On définit la notation $\{L_1(\vartheta), L_2(\vartheta), \dots\}$, l'ensemble de niveau qu'occupe un assuré ayant une fréquence de réclamation moyenne ϑ dans l'échelle du SBM. La probabilité de cet assuré de passer du niveau l_1 au niveau l_2 en une année peut être définie comme :

$$p_{l_1 l_2}(\vartheta) = \Pr[L_{t+1}(\vartheta) = l_2 | L_t(\vartheta) = l_1] \quad l_1, l_2 \in \{1, \dots, s\},$$

où $p_{l_1 l_2}(\vartheta) \geq 0 \forall l_1, l_2, \sum_{l_2=1}^s p_{l_1 l_2}(\vartheta) = 1$. Étant donné le lien qui existe entre les règles de transition et les niveaux qu'occupe l'assuré dans l'échelle bonus-malus, les probabilités de transition peuvent être exprimées en fonction de la matrice $T(k)$ introduite à la sous-section 2.1.1. La probabilité de l'assuré de passer du niveau l_1 au niveau l_2 peut donc être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} p_{l_1 l_2}(\vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[L_{t+1}(\vartheta) = l_2 | N_{t+1} = n, L_t(\vartheta) = l_1] \Pr[N_{t+1} = n | L_t(\vartheta) = l_1] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t_{l_1 l_2}(n) \Pr[N_{t+1} = n | L_t(\vartheta) = l_1], \end{aligned}$$

où N_{t+1} représente le nombre de réclamations de l'assuré durant la période $t + 1$. Les composantes $p_{l_1 l_2}(\vartheta)$ peuvent donc être écrites en terme d'une matrice de la forme suivante :

$$P(\vartheta) = \begin{pmatrix} p_{11}(\vartheta) & p_{12}(\vartheta) & \cdots & p_{1s}(\vartheta) \\ p_{21}(\vartheta) & p_{22}(\vartheta) & \cdots & p_{2s}(\vartheta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{s1}(\vartheta) & p_{s2}(\vartheta) & \cdots & p_{ss}(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

La matrice de probabilité de transition $P(\vartheta)$ est une matrice markovienne puisque, tel que mentionné plus tôt, le prochain niveau de l'assuré est indépendant des niveaux passés. Elle ne dépend que du niveau présent et du nombre de sinistres déclarés durant la période courante, propriété des chaines de Markov. Une excellente introduction aux chaines de Markov, avec applications sur les systèmes bonus-malus est faite dans le chapitre 7 de (Rolski et al., 1999). Pour déterminer la proportion des assurés dans les niveaux de l'échelle bonus-malus après t années, une façon bien connue est de multiplier la matrice de probabilité de transition à la puissance t .

2.2 Méthode asymptotique

2.2.1 Relativités sans contraintes

L'objectif d'un système bonus-malus est de distinguer ou séparer de manière adéquate les bons des mauvais conducteurs en fonction de leur niveau de risque. Un système bonus-malus est dit efficient si le processus de séparation des assurés est fait de manière efficace, c'est-à-dire si la qualité de prédiction de la prime de l'assuré est adéquate. Dans cet ordre d'idée, (Norberg, 1976) propose qu'une fois le nombre de niveaux et les règles de transition du SBM sont fixés, la prime relative ou relativité optimale, est déterminée en maximisant la qualité de prédiction. Cela revient à minimiser la différence carrée moyenne entre r_L et Θ , où r_L représente la relativité associée au niveau L de l'échelle bonus-malus, et Θ , la relativité inconnue. En terme mathématique, il s'agit donc de minimiser la fonction de perte quadratique de la forme $E[(\Theta - r_L)^2]$. D'autres fonctions de perte peuvent être utilisées pour estimer les primes relatives du système bonus-malus comme la fonction de perte exponentielle (Denuit et Dhaene, 2001) ou la fonction de perte en valeur absolue développée par (Heras, Gil et Vilvar, 2002) et (Heras et al., 2004). La solution qui minimise la différence carrée moyenne entre r_L et Θ peut être déterminée de la façon suivante. On sait que :

$$E[(\Theta - r_L)^2] = \sum_{l=1}^s E[(\Theta - r_l)^2 | L = l] \Pr[L = l],$$

où $L = l$ représente le niveau occupé par l'assuré et $\Pr[L = l]$ représente la proportion des assurés au niveau l du SBM.

La proportion $\Pr[L = l]$ est définie de la manière suivante. Soient $p_{l_1 l_2}(\lambda\theta)$, la probabilité qu'un assuré dont la fréquence de réclamation est $\lambda\theta$, occupant le niveau l_1 en début de période, soit transféré au niveau l_2 en fin de période; et $p_{l_1 l_2}^{(t)}(\lambda\theta)$, la probabilité qu'il soit transféré du niveau l_1 au niveau l_2 en t années. Une fois l'état stationnaire atteint c'est-à-dire après un temps suffisamment long, la proportion d'assurés de fréquence de réclamation $\lambda\theta$ au niveau l_2 est :

$$\Pr[L = l_2 | \Theta = \theta] = \pi_{l_2}(\lambda\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{l_1 l_2}^{(t)}(\lambda\theta).$$

Soit w_k la proportion de la k^e classe de risque à laquelle est associée la fréquence de réclamation annuelle $\Lambda = \lambda_k$. Donc :

$$\begin{aligned} \Pr[L = l] &= \sum_k w_k \int_0^\infty \Pr[L = l | \Theta = \theta, k] f_\Theta(\theta) d\theta \\ &= \sum_k w_k \int_0^\infty \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} E[(\Theta - r_L)^2] &= \sum_{l=1}^s E[(\Theta - r_l)^2 | L = l] \Pr[L = l] \\ &= \sum_{l=1}^s \int_0^\infty (\theta - r_l)^2 \Pr[L = l | \Theta = \theta, k] f_\Theta(\theta) d\theta \\ &= \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s (\theta - r_l)^2 \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (2.1)$$

La solution qui minimise l'équation (2.1) est la suivante :

$$\begin{aligned} r_l &= E[\Theta | L = l] \\ &= E\left[E[\Theta | L = l, \Lambda] \middle| L = l\right] \\ &= \sum_k E[\Theta | L = l, \Lambda = \lambda_k] \times \Pr[\Lambda = \lambda_k | L = l] \\ &= \sum_k \left(\int_0^\infty \theta \frac{\Pr[L = l | \Theta = \theta, \Lambda = \lambda_k] w_k}{\Pr[L = l, \Lambda = \lambda_k]} f_\Theta(\theta) d\theta \right) \times \frac{\Pr[\Lambda = \lambda_k, L = l]}{\Pr[L = l]}, \end{aligned}$$

ce qui fournit :

$$r_l = \frac{\sum_k w_k \int_0^\infty \theta \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta}{\sum_k w_k \int_0^\infty \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta}, \quad (2.2)$$

où $f_{\Theta}(\theta)$ est la fonction de densité de la variable Θ qui représente l'hétérogénéité du portefeuille. L'idée est donc de déterminer un SBM pour chaque classe de risque dans le portefeuille et choisir un SBM global en pondérant tous les SBM individuels.

Les relativités obtenues précédemment selon la fonction de perte quadratique sont des relativités sur lesquelles on ne pose aucune contrainte. D'autres formes de relativités peuvent être obtenues en fonction du besoin. Il suffit juste de poser une contrainte sur les relativités en fonction de la forme désirée. Les deux autres formes de relativités considérées dans le présent ouvrage sont les relativités linéaires (Gilde et Sundt, 1989) ainsi que les relativités bilinéaires, qui sont proposées dans ce mémoire. Les relativités sans contraintes peuvent parfois avoir des tendances irrégulières ou décroissantes comme par exemple, la relativité du niveau l plus petite que celle du niveau $l-1$. Afin d'obtenir une distribution cohérente de relativités mais aussi pour des raisons commerciales en pratique, les relativités linéaires ont été proposées par (Gilde et Sundt, 1989) de façon à ce que la distribution des relativités soit croissante en fonction du niveau. De plus, le nombre de paramètres à estimer dans ce cas est beaucoup plus petit. Les relativités bilinéaires quant à elles sont adaptées en fonction de l'allure de la distribution des relativités sans contraintes où une explication plus détaillée sera faite à la sous-section 2.2.3.

2.2.2 Relativités linéaires

En se basant sur la fonction de perte quadratique, les relativités linéaires de (Gilde et Sundt, 1989) notées $r_l^{lin} = \alpha + \beta l$, sont celles obtenues en minimisant l'erreur carrée moyenne de la forme $Q = E[(\Theta - \alpha - \beta L)^2]$. Les solutions de α et β qui minimisent Q peuvent être trouvées de la façon suivante. En se basant sur l'équation (2.1), on a :

$$\begin{aligned} E[(\Theta - r_L^{lin})^2] &= \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s (\theta - r_l^{lin})^2 \pi_l(\lambda_k \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta \\ &= \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s (\theta - \alpha - \beta l)^2 \pi_l(\lambda_k \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[(\Theta - r_L^{lin})^2]}{\partial \alpha} = 0 &\Rightarrow -2 \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s (\theta - \alpha - \beta l) \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta = 0 \\ \Rightarrow \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s \theta \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta &= \alpha + \beta \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s l \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} E[\Theta] &= \alpha + \beta E[L] \\ \Rightarrow \alpha &= E[\Theta] - \beta E[L]. \end{aligned}$$

En ce qui a trait à la valeur optimale de β , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[(\Theta - r_L^{lin})^2]}{\partial \beta} = 0 &\Rightarrow -2 \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s l (\theta - \alpha - \beta l) \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta = 0 \\ \Rightarrow \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s l \left[\theta - E[\Theta] + \beta(E[L] - l) \right] \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta &= 0 \\ \Rightarrow E[L\Theta] - E[L] E[\Theta] + \beta(E[L]^2 - E[L^2]) &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\beta = \frac{E[L\Theta] - E[L] E[\Theta]}{E[L^2] - E[L]^2}.$$

De ce qui précède, on a :

$$\beta = \frac{\text{Cov}[L, \Theta]}{\text{Var}[L]}, \quad \alpha = E[\Theta] - \frac{\text{Cov}[L, \Theta]}{\text{Var}[L]} E[L] \quad \text{où :}$$

$$\Pr[L = l] = \sum_k w_k \int_0^\infty \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta,$$

$$E[L] = \sum_{l=1}^s l \Pr[L = l], \quad \text{Var}[L] = \sum_{l=1}^s (l - E[L])^2 \Pr[L = l],$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[L, \Theta] &= E[L\Theta] - E[L] E[\Theta] \\ &= \sum_k w_k \sum_{l=1}^s l \int_0^\infty \theta \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta - E[L] E[\Theta]. \end{aligned}$$

En se basant sur les valeurs optimales de α et β , on obtient :

$$r_l^{lin} = 1 + \frac{\text{Cov}[L, \Theta]}{\text{Var}[L]}(l - E[L]). \quad (2.3)$$

Le premier terme de l'équation (2.3) vient du fait que l'on suppose que la distribution de l'hétérogénéité représentant le niveau de risque inconnu de l'assuré est choisie de telle sorte que son espérance est unitaire.

2.2.3 Relativités bilinéaires

Les relativités bilinéaires représentent une forme de relativité adaptée en fonction de l'allure de la distribution des relativités sans contraintes. Ces relativités ont été construites en se basant visuellement sur la courbe issue de la distribution des relativités sans contraintes. De manière plus formelle, la figure 2.1 présente un exemple de distribution de relativités sans contraintes de 2 systèmes bonus-malus avec échelle $-1/+9$ et $-1/+11$. Une analyse de la distribution des relativités du modèle bonus-malus $-1/+9$ indique un premier saut du niveau 1 et un deuxième saut du niveau 10, le niveau qu'un assuré, entrant dans le système au niveau 1 et ayant eu une réclamation durant la période couverte, occupera la prochaine période. Il en est de même avec le modèle bonus-malus $-1/+11$ avec le deuxième saut observé au niveau 12. Ces distributions de relativités peuvent donc se résumer à une double droite, reliée par des points et où s'observent des sauts en fonction de la pénalité et du niveau à occuper en cas de réclamation.

Dans cet ordre d'idée, les relativités bilinéaires sont définies comme :

$$r_l^{bilin} = \begin{cases} \alpha & \text{si } l = 1 \\ \alpha + \beta(l + x) & \text{si } 2 \leq l \leq x + 1 \\ \alpha + \gamma l & \text{si } x + 2 \leq l \leq s, \end{cases}$$

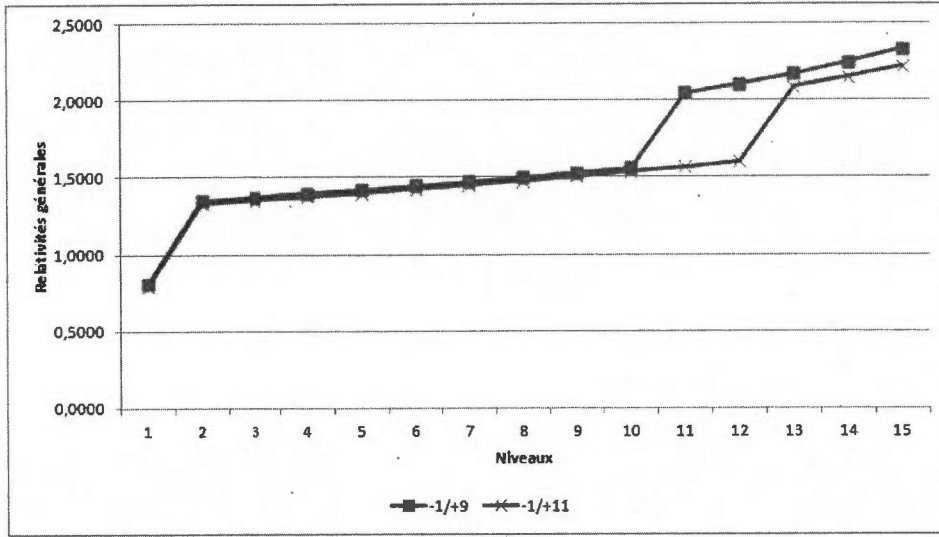


Figure 2.1: Distribution des relativités sans contraintes obtenues selon la méthode asymptotique

où x représente la pénalité en cas de réclamation et l , le niveau du système bonus-malus.

On peut donc réécrire la relativité bilinéaire associée au niveau l sous la forme :

$$r_l^{bilin} = \alpha + \beta(l + x)1_A + \gamma l 1_B,$$

où $1_A = 1[2 \leq l \leq x+1]$ et $1_B = 1[x+2 \leq l \leq s]$; 1 représente une fonction indicatrice.

En supposant une fonction de perte quadratique, les relativités bilinéaires sont trouvées en minimisant l'erreur carrée moyenne de la forme $Q = E[(\Theta - \alpha - \beta(L + x)1_A - \gamma L 1_B)^2]$. En se basant sur l'équation (2.1), les solutions de α , β et γ qui minimisent Q peuvent être trouvées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E[(\Theta - r_L^{bilin})^2] &= \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s (\theta - r_l^{bilin})^2 \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta \\ &= \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s \left(\theta - \alpha - \beta(l + x)1_A - \gamma l 1_B \right)^2 \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

ce qui fournit,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E[(\Theta - r_L^{bilin})^2]}{\partial \alpha} = 0 \\
\Rightarrow & -2 \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s \left(\theta - \alpha - \beta(l+x) \mathbf{1}_A - \gamma l \mathbf{1}_B \right) \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta = 0 \\
\Rightarrow & \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s \theta \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta \\
= & \alpha + \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s \left(\beta(l+x) \mathbf{1}_A + \gamma l \mathbf{1}_B \right) \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
E[\Theta] &= \alpha + \beta E[(L+x) \mathbf{1}_A] + \gamma E[L \mathbf{1}_B] \\
\Rightarrow \alpha &= E[\Theta] - \beta E[(L+x) \mathbf{1}_A] - \gamma E[L \mathbf{1}_B].
\end{aligned} \tag{2.4}$$

En ce qui a trait à la valeur optimale de γ , on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E[(\Theta - r_L^{bilin})^2]}{\partial \gamma} = 0 \\
\Rightarrow & -2 \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s l \mathbf{1}_B \left(\theta - \alpha - \beta(l+x) \mathbf{1}_A - \gamma l \mathbf{1}_B \right) \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta = 0,
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$E[\Theta L \mathbf{1}_B] = \alpha E[L \mathbf{1}_B] + \gamma E\left([L \mathbf{1}_B]^2\right) + \beta E\left((L+x) \mathbf{1}_A \times L \mathbf{1}_B\right). \tag{2.5}$$

Le dernier terme de l'équation (2.5) est nul puisqu'un niveau ne peut être aux 2 régions A et B en même temps. En remplaçant le paramètre α de l'équation (2.5) par l'équation (2.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
& E[\Theta L \mathbf{1}_B] \\
= & E[\Theta] E[L \mathbf{1}_B] + \gamma \left[E\left([L \mathbf{1}_B]^2\right) - \left(E[L \mathbf{1}_B]\right)^2 \right] - \beta E[(L+x) \mathbf{1}_A] E[L \mathbf{1}_B] \\
= & E[\Theta] E[L \mathbf{1}_B] + \gamma \text{Var}[L \mathbf{1}_B] - \beta E[(L+x) \mathbf{1}_A] E[L \mathbf{1}_B].
\end{aligned} \tag{2.6}$$

De la même manière, en dérivant l'espérance par rapport au paramètre β , on a :

$$\begin{aligned} & E[\Theta (L+x) \mathbf{1}_A] \\ = & E[\Theta] E[(L+x) \mathbf{1}_A] + \beta \text{Var}[(L+x) \mathbf{1}_A] - \gamma E[(L+x) \mathbf{1}_A] E[L \mathbf{1}_B]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

En trouvant le paramètre γ en fonction de β à l'aide de l'équation (2.6), on obtient :

$$\gamma = \frac{E[\Theta L \mathbf{1}_B] - E[\Theta] E[L \mathbf{1}_B] + \beta E[(L+x) \mathbf{1}_A] E[L \mathbf{1}_B]}{\text{Var}[L \mathbf{1}_B]}. \quad (2.8)$$

En remplaçant par la suite, le paramètre γ de l'équation (2.7) par l'équation (2.8), on a :

$$\beta = \frac{E[\Theta (L+x) \mathbf{1}_A] - E[\Theta] E[(L+x) \mathbf{1}_A] + E[(L+x) \mathbf{1}_A] E[L \mathbf{1}_B] \frac{E[\Theta L \mathbf{1}_B] - E[\Theta] E[L \mathbf{1}_B]}{\text{Var}[L \mathbf{1}_B]}}{\text{Var}[(L+x) \mathbf{1}_A] - \frac{\left(E[(L+x) \mathbf{1}_A] E[L \mathbf{1}_B] \right)^2}{\text{Var}[L \mathbf{1}_B]}}.$$

Les relativités bilinéaires seront donc estimées à l'aide des paramètres α , β et γ où :

$$\Pr[L = l] = \sum_k w_k \int_0^\infty \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta,$$

$$E[(L+x) \mathbf{1}_A] = \sum_{l=1}^s (l+x) \mathbf{1}_A \Pr[L = l],$$

$$\text{Var}[(L+x) \mathbf{1}_A] = \sum_{l=1}^s \left((l+x) \mathbf{1}_A - E[(L+x) \mathbf{1}_A] \right)^2 \Pr[L = l],$$

$$E[\Theta (L+x) \mathbf{1}_A] = \sum_k w_k \sum_{l=1}^s (l+x) \mathbf{1}_A \int_0^\infty \theta \pi_l(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta.$$

Les formules d'espérance et de variance ci-dessus ne s'appliquent que dans la région A , c'est-à-dire pour $2 \leq l \leq x + 1$, mais la même démarche peut aussi être adaptée pour trouver ces différentes formules dans la région B c'est-à-dire pour $x + 2 \leq l \leq s$. D'autres formes de relativités ont été proposées dans la littérature actuarielle comme les relativités géométriques (Andrade E Silva et Centeno, 2005) qui sont de la forme $r_l^{geo} = \alpha\beta^l$ où α et β sont positives, mais aucune expression explicite n'est disponible pour les valeurs de α et β en utilisant la fonction de perte quadratique. Ces paramètres doivent être estimés numériquement.

2.3 Méthode non asymptotique

2.3.1 Relativités

La méthode asymptotique suggère que l'on peut approximer la distribution stationnaire des assurés dans le SBM en multipliant la matrice de probabilité de transition définie précédemment après de très longues périodes. Cette méthode suppose qu'en moyenne, la majorité des polices sont des polices âgées avec de longues périodes couvertes. Toutefois, il peut exister dans les portefeuilles d'assurance, une proportion non négligeable de nouvelles et jeunes polices ayant un nombre limité de périodes d'assurance. Selon (Borgan, Hoem et Norberg, 1981), il faudrait considérer cet aspect important dans la tarification des primes. Ces auteurs ont donc proposé de modifier le critère asymptotique afin de tenir compte de l'âge des polices dans la tarification. Cette méthode se base sur le fait qu'il existe dans un portefeuille d'assurance, de nouvelles ou jeunes polices dont les périodes de couvertures sont très petites pour être inclure dans la distribution stationnaire. De ce fait, si la majorité des polices d'un portefeuille d'assurance sont loin de l'état stationnaire, il est désirable de modifier le critère asymptotique afin de prendre en compte l'erreur d'estimation des relativités du système bonus-malus pour ces nouvelles et jeunes polices. Dans un contexte mathématique, le concept de critère non asymptotique peut être défini de la manière suivante :

• soit A l'âge de police dans le portefeuille. La variable A nous permet de tenir compte du caractère non asymptotique de la distribution des assurés dans l'échelle bonus-malus. On suppose que Λ , la fréquence de réclamation et A sont indépendants. La fonction de probabilité de A est de la forme :

$$\Pr[A = t] = a_t, \text{ pour } t = 1, 2, \dots$$

• soient L_A le niveau occupé par l'assuré dans le SBM après A années et $r_{L_A}^{(A)}$, la relativité qui y est associée. Selon la méthode non asymptotique, les relativités du système bonus-malus \bar{r}_l , sont égales à une moyenne pondérée des relativités $r_{L_t}^{(t)}$ associées à un assuré dont l'âge de la police est t . Les relativités $r_{L_t}^{(t)}$ sont trouvées en minimisant la différence carrée moyenne de la forme $Q_t = E[(\Theta - r_{L_A}^{(A)})^2]$. En suivant le même processus que la méthode asymptotique :

$$\begin{aligned} Q_t &= E[(\Theta - r_{L_A}^{(A)})^2] \\ &= E[(\Theta - r_{L_A}^{(A)})^2 | A = t] \\ &= E[(\Theta - r_{L_t}^{(t)})^2] \\ &= \sum_k w_k \int_0^\infty \sum_{l=1}^s (\theta - r_l^{(t)})^2 p_l^{(t)}(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

La solution qui minimise cette dernière équation est de la forme :

$$\begin{aligned} r_l^{(t)} &= E[\Theta | L_A = l, A = t] \\ &= \frac{\sum_k w_k \int_0^\infty \theta p_l^{(t)}(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta}{\sum_k w_k \int_0^\infty p_l^{(t)}(\lambda_k \theta) f_\Theta(\theta) d\theta}, \end{aligned}$$

où $p_l^{(t)}(\lambda_k \theta)$ représente la probabilité qu'un assuré soit au niveau l du SBM après t années. On peut donc aisément montrer que les relativités du portefeuille sont de la

forme :

$$\begin{aligned}
 \bar{r}_l &= E[\Theta | L_A = l] \\
 &= \sum_{t=1}^{\infty} r_l^{(t)} \Pr[A = t | L_A = l] \\
 &= \frac{\sum_{t=1}^{\infty} a_t \sum_k w_k \int_0^{\infty} \theta p_l^{(t)}(\lambda_k \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta}{\sum_{t=1}^{\infty} a_t \sum_k w_k \int_0^{\infty} p_l^{(t)}(\lambda_k \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta}.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

On peut clairement voir que l'équation (2.2) équivaut à l'équation (2.9) lorsque t tend vers ∞ . La distribution de L_A , proportion des assurés après A années dans les niveaux du SBM est définie comme :

$$\Pr[L_A = l] = \sum_{t=1}^{\infty} a_t \sum_k w_k \int_0^{\infty} p_l^{(t)}(\lambda_k \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta.$$

Les relativités dérivées précédemment selon la fonction de perte quadratique sont des relativités sans contraintes (voir équation (2.9)). Mais les différentes formules de relativités linéaires et bilinéaires décrites plus tôt dans le cadre asymptotique peuvent aussi être développées dans un cadre non asymptotique. Selon la méthode asymptotique, on utilise la distribution stationnaire dans les différentes formules de relativités. Pour adapter ces formules dans un cadre non asymptotique, il suffit simplement d'introduire l'âge de la police comme variable additionnelle. Donc, au lieu d'utiliser la distribution stationnaire $\pi_l(\lambda_k \theta)$, on utilisera plutôt dans la méthode non asymptotique, la probabilité d'être au niveau l du SBM après t années soit $p_l^{(t)}(\lambda_k \theta)$. Pour plus d'informations sur les relativités linéaires selon la méthode non asymptotique, on peut se référer à l'ouvrage de (Denuit et al., 2007).

2.3.2 Choix du niveau de départ

Dans un cadre asymptotique, le niveau de départ initial de l'assuré dans l'échelle bonus-malus n'a pas d'impact et n'a donc pas d'influence sur les résultats asymptotiques.

Par conséquent, le choix d'un niveau initial de l'assuré n'a pas besoin d'être pris en compte selon le critère asymptotique. Par contre, dans un cadre non asymptotique où la distribution des assurés dans l'échelle bonus-malus peut ne pas converger à la distribution stationnaire, le niveau initial pourrait avoir un impact majeur ; il faudrait donc en tenir compte. En se basant sur (Denuit et al., 2007), le niveau de départ optimal des assurés du portefeuille est sélectionné en maximisant une mesure efficace du SBM notée \bar{e} égale à une constante près de la variance des relativités non asymptotiques \bar{r}_l (équation (2.9)). Cette mesure est définie comme :

$$\begin{aligned}\bar{e} &= \sum_{l=1}^s (\bar{r}_l)^2 \Pr[L_A = l] \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} a_t \sum_{l=1}^s \sum_k w_k \int_0^{\infty} (\bar{r}_l)^2 p_l^{(t)}(\lambda_k \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta \\ &= \text{Var}[\bar{r}_{L_A}] + 1.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Pour choisir le niveau de départ optimal, il suffit donc de trouver les relativités \bar{r}_l à l'aide de l'équation (2.9) pour chaque distribution initiale e_k , où e_k est un vecteur de 1 au k^e niveau bonus-malus et 0 autrement. Après avoir répété le processus pour chaque e_k , $k = 1, \dots, s$ où s est le niveau maximal du SBM, on trouve la valeur de \bar{e} pour chaque cas. Le niveau optimal est celui qui maximise la valeur de \bar{e} .

2.4 Métriques d'évaluation des systèmes bonus-malus

Les actuaires ont développé plusieurs outils afin d'évaluer la performance ainsi que la qualité de prédiction des primes relatives des systèmes bonus-malus. Dans le cadre du mémoire, les principales métriques d'évaluation actuarielle proposées par (Lemaire, 1995) et (Venter, 1991) sont utilisées parmi les nombreuses autres métriques qu'on peut trouver dans la littérature actuarielle. Pour plus d'information sur les différentes notions abordées dans cette section, on peut se référer aux ouvrages de (Lemaire, 1995) ou de (Denuit et al., 2007).

2.4.1 Le coefficient de variation des primes

Nous savons que l'assurance est un transfert de risque de l'assuré à l'assureur. Sans assurance, l'assuré prend à sa charge les pertes qui surviennent : la variabilité des paiements est maximisée dans ce cas. Par contre, sans système bonus malus (c'est-à-dire sans tarification *a posteriori*), la variabilité des paiements d'assuré au fil des années est de zéro puisque tous les assurés paient une même prime *a priori*. Mais avec un système bonus-malus, il y a une certaine variabilité des paiements selon l'historique de sinistres de chaque assuré. Selon l'ouvrage de (Lemaire, 1995), le coefficient de variation évalue la sévérité du système bonus-malus. Elle se mesure comme étant le rapport de l'écart type sur la moyenne du coût total des sinistres. Si le coefficient de variation est faible, cela semble dire que le système bonus malus ne pénalise pas assez les réclamations. Dans le cas contraire, s'il est élevé, cela semble dire que le SBM est sévère, c'est-à-dire qu'il pénalise trop sévèrement les réclamations. En définissant CV, le coefficient de variation et S , le coût total des sinistres, on a :

$$CV = \frac{\sigma(S)}{E(S)} = \frac{\sqrt{\text{Var}(S)}}{E(S)} = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)E(N) + E(X)^2\text{Var}(N)}}{E(N)E(X)},$$

où $\sigma(S)$ et $E(S)$ représentent l'écart type et l'espérance du coût total des sinistres. N et X représentent le nombre et la sévérité (coût) des réclamations respectivement. Un SBM optimal devrait avoir un coefficient de variation des primes ni trop faible ni trop élevé. Plus le système bonus-malus est sévère, plus le coefficient de variation est grand.

2.4.2 La qualité asymptotique du SBM

Le but d'un SBM est de mieux quantifier le risque d'un assuré pour qu'il paie une prime correspondant à sa fréquence de réclamation. Dans cet ordre d'idée, 2 situations extrêmes se posent :

1. Dans un premier cas, en l'absence d'un SBM, chaque assuré paie une même prime *a priori*. La tarification des primes n'est donc pas équitable puisqu'il y a des assurés

avec de faible fréquence de réclamations qui paient la même prime que ceux ayant une fréquence de réclamations élevée.

2. Dans un second cas, on se retrouve dans un monde parfait où chaque assuré paie une prime qui correspond à sa fréquence de réclamation.

Le SBM se retrouve dans un cas intermédiaire entre les 2 cas cités précédemment. Son but est d'améliorer la qualité de prédiction de la prime du premier cas. Cette mesure consiste donc à évaluer l'écart moyen entre la prime moyenne stationnaire estimée par le SBM et la fréquence observée. Selon (Heras, Gil et Vilvar, 2002), en supposant $U(\lambda)$ la fonction de densité du paramètre λ , r_l la prime au niveau l et $Q(r_l, U, \lambda)$ la qualité asymptotique du SBM, on a :

$$Q(r_l, U, \lambda) = \int_0^\infty \left| \sum_{l=1}^s r_l \pi_l(\lambda) - \lambda \right| U(\lambda) d\lambda,$$

où $\pi_l(\lambda)$ représente la distribution stationnaire des assurés au niveau l . Un système bonus-malus optimal devrait avoir un coefficient asymptotique de qualité de prédiction faible.

2.4.3 L'erreur carrée moyenne de prédiction

Cette mesure n'est rien d'autre qu'une mesure de performance similaire à la qualité asymptotique du SBM en ce sens qu'elle calcule la différence carrée moyenne entre la prime moyenne stationnaire et la valeur observée de la moyenne *a priori*. Selon (Venter, 1991), en supposant $U(\lambda)$ la fonction de densité du paramètre λ , r_l la prime au niveau l du SBM et $ECM(r_l, U, \lambda)$ l'erreur carrée moyenne de prédiction du SBM, on a

$$ECM(r_l, U, \lambda) = \int_0^\infty \left(\sum_{l=1}^s r_l \pi_l(\lambda) - \lambda \right)^2 U(\lambda) d\lambda,$$

où $\pi_l(\lambda)$ représente la distribution stationnaire des assurés au niveau l de l'échelle bonus-malus.

2.4.4 L'élasticité du SBM

Selon (Loimaranta, 1972), l'élasticité du SBM mesure la réponse du SBM suite au changement de la fréquence de réclamation. Idéalement, les primes d'assurés devraient être une fonction croissante de la fréquence de réclamation et cette dépendance devrait être linéaire. Par exemple, une augmentation de 10 % de la fréquence de réclamation devrait produire une augmentation de 10 % de la prime. En général, l'augmentation de la prime est moindre que celle de la fréquence de réclamation. L'élasticité se définit comme :

$$\text{Elasticité} = \frac{d \ln \bar{r}_l(\lambda)}{d \ln \lambda},$$

où $\bar{r}_l(\lambda) = \sum_{i=1}^s \pi_i(\lambda) r_i$ et λ représente la fréquence de réclamation. Un système bonus-malus optimal devrait avoir une élasticité proche de 1 mais en pratique, presque tous les systèmes bonus-malus n'ont pas une valeur d'élasticité proche de cette valeur (Lemaire, 1995).

2.4.5 Le taux de convergence

Pour certains SBM, la distribution des assurés entre les classes s'approche de la distribution stationnaire après peu d'années contrairement à d'autres où cela prend plus de temps voir 30, 60 ans par exemple. Comme le but du SBM est de corriger les imperfections de la tarification *a priori* en séparant de manière adéquate les bons des mauvais conducteurs, le processus de séparation devrait se faire de manière rapide. Un temps de convergence de 60 ans est excessif comparativement à la durée de vie de conduite des assurés. Le taux de convergence mesure donc le degré de convergence du

système bonus-malus en calculant l'écart entre la probabilité de transition après t années et la distribution de probabilité stationnaire. Selon (Bonsdorff, 1992), en supposant TC, le taux de convergence, on a :

$$TC(l_1) = \sum_{l_2=1}^s \left| p_{l_1 l_2}^t(\lambda) - \pi_{l_2}(\lambda) \right|,$$

où $p_{l_1 l_2}^t(\lambda)$ est la probabilité qu'un assuré au niveau l_1 en début de période se retrouve au niveau l_2 après t périodes et $\pi_{l_2}(\lambda)$ est la distribution stationnaire au niveau l_2 . Le taux de convergence est généralement entre 0 et 2, mais diminue progressivement à 0 lorsque le SBM se stabilise. Il est à noter que cette mesure est fortement influencée par le nombre de niveaux du système bonus-malus ainsi que le niveau de départ des assurés dans le système. Le taux de convergence est une mesure qui se calcule en tenant compte des critères asymptotique et non asymptotique puisqu'il requiert l'utilisation des distributions des assurés dans l'échelle bonus-malus selon les 2 critères.

2.4.6 Le niveau moyen stationnaire du SBM

Une conséquence de l'utilisation d'un SBM est la baisse progressive de la prime moyenne dû à une forte concentration des assurés dans les basses classes du système bonus-malus. De ce fait, le niveau moyen stationnaire propose de déterminer la position relative d'un assuré moyen à l'état stationnaire. Il évalue donc le degré de concentration des assurés dans les bas niveaux de l'échelle bonus-malus. Selon (Lemaire, 1995), le niveau moyen stationnaire RSAL (*Relative Stationary Average Level*) se définit comme suit :

$$RSAL = \frac{\bar{r} - r_1}{r_s - r_1},$$

où \bar{r} est la prime relative moyenne stationnaire, r_1 et r_s les primes relatives au plus bas et haut niveau du SBM respectivement. Un système bonus-malus optimal devrait avoir

un niveau moyen stationnaire ni trop bas ni trop élevé. Lemaire (1995) recommande 50% comme valeur idéale en se basant sur l'idée qu'un assuré moyen devrait se situer au point milieu des niveaux de primes relatives. Mais selon la littérature actuarielle, aucun système n'a été proche de cette valeur optimale.

2.4.7 La transparence d'un SBM optimal

Lemaire (1995) a montré que l'utilisation d'un SBM entraîne une réduction progressive de la prime moyenne due à une forte concentration des assurés dans les bas niveaux de l'échelle et à une pénalisation insuffisante des mauvais conducteurs. Cette réduction cause un déséquilibre financier du SBM. Par conséquent, on observe un ajustement constant des primes pour que le système soit balancé financièrement. Ce phénomène engendre donc une non transparence de l'activité d'assurance entre l'assureur et l'assuré en ce sens que ce dernier ne reçoit pas de manière effective les réductions et majorations des primes telles que spécifiées dans la police. De ce fait, le but de cette métrique nous permet de savoir non seulement si le SBM estime de manière adéquate les primes mais aussi de nous assurer de la condition de transparence entre l'assureur et l'assuré. (Fabio, Levantesi et Menzietti, 2002) propose que l'obtention d'un système bonus-malus optimal soit basée sur 2 conditions principales à savoir :

1. minimiser l'erreur entre la prime estimée et la prime observée ;
2. avoir une prime moyenne stationnaire unitaire.

Par conséquent, l'analyse suggère que pour que les conditions de transparence et de balancement financier du SBM soient satisfaites, il faudrait pénaliser plus durement les conducteurs et ainsi obtenir un meilleur portefeuille de risques avec une segmentation adéquate.

Outre les mesures d'évaluation décrites précédemment, plusieurs autres outils d'évaluation sont proposés dans la littérature afin de mieux évaluer la performance des systèmes bonus-malus. Les mesures d'évaluation gouvernementale comme le coût

de redistribution, la dissuasion, la responsabilité financière et l'acceptation du public de l'introduction d'un SBM proposées par (Ferreira, 1974) sont d'autres outils utilisés. Ces mesures ne sont pas considérées dans le cadre du mémoire puisque d'une part, elles sont en quelque sorte similaires aux outils d'évaluation actuarielle et d'autre part, la quantification de ces dernières est moins précise. Toutefois, ces mesures favorisent les systèmes bonus-malus moins sévères comparativement aux mesures actuarielles qui semblent plutôt favoriser les systèmes plus sévères. Le coefficient de variation, l'erreur carrée moyenne, l'élasticité, le taux de convergence et le niveau moyen stationnaire sont les principales mesures d'évaluation utilisées dans ce mémoire.

2.5 Applications avec les données

2.5.1 Tarification déjà choisie

Des paramètres importants à considérer dans la modélisation sont ceux de la tarification *a priori*, qui consiste à utiliser les caractéristiques observables des assurés tels que l'âge, le sexe, l'état civil, la propriété de la maison, etc., comme variables explicatives à inclure dans le paramètre de la moyenne. Ce processus permet de voir lesquels de ces caractéristiques influencent significativement le nombre de réclamations totales. En terme mathématique, il s'agit donc d'utiliser les modèles linéaires généralisés (GLM) pour estimer la fréquence de réclamation totale $\lambda_i = d_i \exp(X_i' \beta)$, où $X_i' = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$ représente la matrice comportant les caractéristiques observables des assurés, d_i représente l'exposition au risque et β , le vecteur des coefficients relatifs à l'estimation de la moyenne. Les modèles de régression généralement utilisés pour estimer les coefficients β sont les modèles de Poisson et binomiale négative pour ne citer que ceux là. Dans une régression de Poisson par exemple, notons $N_i, i = 1, 2, \dots, n$, le nombre de réclamations de l'assuré i (on suppose que les N_i sont indépendants). La régression de Poisson est une technique analogue à la régression linéaire excepté que les erreurs ne suivent plus une loi normale. Le nombre espéré de réclamations de l'assuré i

sachant ses caractéristiques observables x_i est donné par

$$E[N_i|x_i] = d_i \exp \left(\beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

où β_0 représente l'ordonnée à l'origine (*intercept*). Le modèle de régression de Poisson consiste à supposer que N_i suit une loi de Poisson de moyenne $E[N_i|x_i]$ soit :

$$N_i \sim \text{Pois} \left(d_i \exp \left(\beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

La quantité $\beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}$ représente le score aussi appelé prédicteur linéaire. L'utilisation de la fonction exponentielle permet d'avoir une fréquence de réclamation positive même si le score peut être négatif. Un estimé de la fréquence de réclamation de l'assuré i est obtenu à l'aide des estimateurs des coefficients de régression $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p$ obtenus en utilisant les méthodes d'estimation comme le maximum de vraisemblance.

Le portefeuille d'assurance utilisé pour applications dans ce mémoire est un portefeuille issu d'une méthode de segmentation prédéfinie. En effet, pour des raisons commerciales, la compagnie d'assurance d'où proviennent les données utilise des caractéristiques observables spécifiques dans son modèle de tarification *a priori*. Dans cet ordre d'idée, la fréquence de réclamation estimée $\hat{\lambda}$ est une variable déjà disponible dans la base de données qui a été utilisée pour estimer les relativités du système bonus-malus. La raison principale de l'utilisation de ce paramètre déjà estimé est d'obtenir des résultats cohérents en fonction de la méthode de tarification *a priori* utilisée par la compagnie d'assurance.

2.5.2 Caractère responsable versus non-responsable

Le système bonus-malus considéré dans le cadre de l'étude est un système à classes ou niveaux, où les assurés se promènent en fonction du nombre de sinistres déclarés et

des règles de transition prédéfinies dans le système. Dans certaines provinces du Canada, les lois sur l'assurance tiennent compte de la nature responsable ou non de l'accident déclaré dans la tarification des primes. Comme exemple, un sinistre peut être déclaré responsable si l'assuré a au moins 75% de part de responsabilité dans l'accident. Les compagnies d'assurance opérant dans ces provinces, comme celle dont on utilise les données, doivent considérer la nature responsable du sinistre pour déterminer la prime future de l'assuré. De manière plus explicite, une loi sur l'assurance interdit de pénaliser les accidents non responsables. Dans la modélisation du nombre de réclamations, on veut en tenir compte en ne diminuant pas la prime des assurés ayant eu des sinistres non responsables. Cette idée vient du fait que l'assuré qui a tendance à réclamer une série d'accidents non responsables n'est plus associé à un fait de hasard et coûte quand même cher à l'assureur. De ce fait, dans la modélisation, l'assuré ayant eu un sinistre responsable durant sa période assurable sera pénalisé la prochaine période assurable tandis que l'assuré ayant eu un sinistre non responsable aura une prime inchangée la prochaine période. Dans le cas de l'assuré qui n'a pas eu de sinistres, il aura une prime inférieure à celle de la période précédente puisqu'il est considéré comme un bon conducteur.

2.5.3 SBM à deux dimensions

Afin de tenir compte du caractère responsable ou non des réclamations, le modèle bonus-malus $-1/0/+x$ est utilisé où le terme -1 signifie qu'en cas d'année sans accident, l'assuré descend d'un niveau de moins que son niveau de début de période. Le terme 0 signifie que peu importe le nombre d'accidents non responsables déclarés par l'assuré et s'il n'a pas d'accidents responsables, ce dernier reste toujours au même niveau qu'il occupait dans le SBM au début de la période couverte. Le terme x représente la pénalité à appliquer en cas de réclamation responsable, c'est-à-dire que l'assuré monte de $x \times n$ de plus que son niveau de début de période où n représente le nombre de réclamations responsables. Pour fin d'illustration, les règles de transition d'un système bonus-malus

à 6 niveaux d'échelle $-1/0/+2$ sont représentés dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1: Règles de transition d'un SBM à 6 niveaux avec échelle $-1/0/+2$

Niveau de départ	Niveau après (j, k) réclamations				
	$(j, k) = (0, 0)$	$(\geq 1, 0)$	$(\geq 1, 1)$	$(\geq 1, 2)$	$(\geq 1, \geq 3)$
1	1	1	3	5	6
2	1	2	4	6	6
3	2	3	5	6	6
4	3	4	6	6	6
5	4	5	6	6	6
6	5	6	6	6	6

Les paramètres k et j représentent le nombre de réclamations responsables et non responsables respectivement. En supposant un modèle de Poisson pour le nombre de réclamations, la matrice de probabilité de transition de ce type de système est de la forme suivante :

$$P(\lambda^F, \lambda^{Fc}) = \begin{pmatrix} p_0 + p_1 & 0 & p_F(1) & 0 & p_F(2) & p_F(\geq 3) \\ p_0 & p_1 & 0 & p_F(1) & 0 & p_F(\geq 2) \\ 0 & p_0 & p_1 & 0 & p_F(1) & p_F(\geq 2) \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & 0 & p_F(\geq 1) \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & p_1 & p_F(\geq 1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 1 - e^{-\lambda} \end{pmatrix}$$

où $\lambda = \lambda^F + \lambda^{Fc}$ représente la fréquence de réclamation totale; λ^F et λ^{Fc} représentent la fréquence de réclamation responsable et non responsable respectivement; $p_0 = p_F(0) \times p_{Fc}(0) = e^{-\lambda}$ représente la probabilité d'avoir 0 réclamation avec $p_F(n) = \frac{\exp(-\lambda^F)(\lambda^F)^n}{n!}$ et $p_{Fc}(n) = \frac{\exp(-\lambda^{Fc})(\lambda^{Fc})^n}{n!}$; $p_1 = p_F(0) \times p_{Fc}(\geq 1) = e^{-\lambda^F}(1 - e^{-\lambda^{Fc}})$ représente la probabilité d'avoir 0 réclamation responsable et au moins une réclamation non responsable; $p_F(\geq n)$ représente la probabilité d'avoir au moins n réclamations responsables. Il est à noter que chaque ligne de la matrice somme à 1.

2.5.4 Estimation des paramètres d'hétérogénéité

Tel que spécifié plus tôt, le paramètre λ représentant la fréquence de réclamation totale de l'assuré est un paramètre estimé en se basant sur les régresseurs déjà choisis. En ce qui a trait à la modélisation de l'hétérogénéité du portefeuille, la distribution du nombre de réclamations totales servant à estimer le paramètre d'hétérogénéité se définit comme suit :

- soit $N^F | \Theta = \theta \sim \text{Poisson}(\lambda^F \theta)$ où N^F représente le nombre de réclamations responsables et λ^F la fréquence de réclamation responsable ;
- soit $N^{Fc} | \Theta = \theta \sim \text{Poisson}(\lambda^{Fc} \theta)$ où N^{Fc} représente le nombre de réclamations non responsables et λ^{Fc} la fréquence de réclamation non responsable ;
- on pose $N = N^F + N^{Fc}$ le nombre de réclamations totales indépendamment du caractère responsable ou non. On suppose que le nombre de réclamations responsables est conditionnellement à Θ , indépendant du nombre de réclamations non responsables. Par indépendance, $N | \Theta = \theta \sim \text{Poisson}(\lambda \theta)$ où $\lambda = \lambda^F + \lambda^{Fc}$ représente la fréquence de réclamation totale ;

- l'effet aléatoire Θ rend compte de l'hétérogénéité du portefeuille ; on suppose $\Theta \sim \Gamma(\alpha, \alpha)$ avec $E[\theta] = 1$ et $\text{Var}[\theta] = 1/\alpha$.

En utilisant les méthodes par conditionnement, on peut montrer que la distribution conjointe du nombre de réclamations totales N de l'assuré n'est rien d'autre qu'une binomiale négative multivariée (MVNB) dont la preuve de cette distribution est détaillée dans la section 1.5.

La procédure NLMIXED du logiciel SAS est utilisée pour trouver l'estimé de α ainsi que son écart type. En utilisant le paramètre $\hat{\lambda}$ ainsi que la distribution du nombre de réclamations totales N qui obéit à une loi binomiale négative multivariée, les résultats issus de l'estimation de α (écart type) se trouvent dans le tableau 2.2.

En utilisant le test de Wald, le but est de tester l'hypothèse $H_0 : \alpha = 0$ vs $H_1 : \alpha >$

Tableau 2.2: Test de Wald sur le paramètre α

Distribution	Valeur estimée	Test	IC inf	IC sup	Décision
MVNB	1.4652 (0.1017)	Wald	1.2980	1.6325	Rejet

0. Un problème au niveau du test de Wald survient lorsqu'il est influencé par les bornes de l'espace paramétrique. En effet, lorsque le paramètre testé est limité par l'hypothèse H_0 , l'estimé du paramètre est aussi limité et la normalité asymptotique de l'estimateur ne tient plus (voir (Boucher, Denuit et Guillén, 2007) pour plus d'explications). Par conséquent, une correction s'impose. Une solution pour résoudre ce problème consiste à utiliser un test unilatéral pour tester le paramètre. De ce fait, en supposant que le seuil du test $\delta = 5\%$, on rejette l'hypothèse nulle tel que l'indique l'intervalle de confiance puisque 0 n'appartient pas à l'intervalle. Plusieurs autres tests peuvent être utilisés pour corriger ce problème comme le test de score montré par (Chant, 1974) et (Moran, 1971).

2.5.5 Estimation des relativités

Afin de comparer les différentes méthodes d'estimation des relativités selon les critères asymptotique (Norberg, 1976) et non asymptotique (Borgan, Hoem et Norberg, 1981), 4 systèmes bonus-malus ayant 15 niveaux sont considérés, où seule la pénalité change en fonction du type du SBM. Il s'agit des modèles bonus-malus avec échelle $-1/0/ + 8, -1/0/ + 9, -1/0/ + 10, -1/0/ + 11$. Le choix de ces modèles bonus-malus est principalement basé sur le fait qu'en évaluant la performance des différents systèmes $-1/0/ + x$ de manière globale, seuls les systèmes énumérés plus tôt semblent être les mieux performants tel que la sous-section 2.5.8 traitant de l'évaluation des systèmes bonus-malus l'indique. Les relativités bonus-malus sont estimées en utilisant les 3 formes de relativités spécifiées précédemment, à savoir les relativités générales ou sans contraintes ainsi que les relativités linéaires et bilinéaires. Les relativités bonus-malus sont calculées numériquement à l'aide du logiciel SAS. Les intégrations sont faites

avec la fonction QUAD de SAS. Elles ont été estimées à l'aide de la distribution des fréquences de réclamation $\hat{\lambda}_k$ annualisées, associée à la classe de risque k ainsi que le paramètre d'hétérogénéité $\hat{\alpha}$.

1. Méthode asymptotique

En considérant la méthode asymptotique expliquée dans la section 2.2, les tableaux 2.3 et 2.4 résument respectivement les estimés des 3 formes de relativités considérées ainsi que des surcharges respectives. Les surcharges sont trouvées par rapport au niveau 1, c'est-à-dire que la surcharge du niveau l est égale à $\frac{r_l}{r_1} - 1$ où r_l correspond à la relativité associée au niveau l et r_1 , celle associée au niveau 1. Le tableau A.1 en annexe résume les proportions des assurés dans les différents niveaux des systèmes bonus-malus considérés.

De manière globale, les relativités ainsi que les surcharges des différents SBM varient d'un modèle bonus-malus à un autre. On remarque que plus la pénalité augmente, plus les relativités et surcharges diminuent. Une analyse des tableaux montre que le modèle bonus-malus $-1/0/+8$ semble être celui qui surcharge le plus et ayant la plus forte proportion des assurés dans les bas niveaux de l'échelle bonus-malus comparativement aux autres modèles. Ce phénomène s'explique par le fait qu'en cas d'une réclamation responsable, un assuré qui entre dans le SBM au niveau 1 en début de période par exemple, se retrouvera au niveau 9 et par la suite, a plus de chance de se retrouver plus rapidement aux plus bas niveaux de l'échelle s'il ne fait aucune réclamation. Quant aux autres modèles bonus-malus, en cas d'une réclamation responsable, cet assuré se retrouvera au niveau 10, 11, 12 selon les modèles $-1/0/+9$, $-1/0/+10$, $-1/0/+11$ respectivement. Par conséquent, il se retrouvera aux bas niveaux de l'échelle bonus-malus moins rapidement que le modèle bonus-malus $-1/0/+8$ tel que l'indique le tableau A.1 en annexe. En suivant cette logique, en cas d'une seconde réclamation responsable,

il devrait être pénalisé davantage selon le modèle $-1/0/+8$ comparativement aux autres modèles bonus-malus. Donc, plus la pénalité du SBM augmente, plus la proportion des assurés dans les bas niveaux de l'échelle bonus-malus diminue et plus la surcharge aux niveaux élevés diminue.

Les relativités bilinéaires constituent une forme particulière des relativités générales dans le sens où une analyse visuelle de la distribution de ces dernières indique qu'il existe un lien entre la pénalité et les niveaux du SBM. Comme observé à la figure 2.1, une analyse de la distribution des relativités sans contraintes à la figure A.1 en annexe indique un premier saut du niveau 1 et un deuxième saut du niveau 9, 10, 11 et 12, le niveau qu'un assuré entrant dans le système au niveau 1 et ayant eu une réclamation responsable durant la période couverte, occupera la prochaine période selon les SBM $-1/0/+8$, $-1/0/+9$, $-1/0/+10$ et $-1/0/+11$ respectivement. Une analyse des tableaux 2.3 et 2.4 indique que les relativités et surcharges bilinéaires sont moindres que les relativités générales dans les bas niveaux contrairement aux niveaux élevés. De plus, les relativités ainsi que les surcharges linéaires semblent globalement moindres que celles des modèles général et bilinéaire. Les figures 2.2 et 2.3 illustrent la distribution des formes de relativités ainsi que des surcharges du SBM $-1/0/+9$. On remarque que le modèle bilinéaire ajuste bien le modèle général. De plus, les surcharges générales et bilinéaires semblent être élevées dans les bas et hauts niveaux de l'échelle bonus-malus comparativement aux surcharges linéaires. De manière globale, les modèles général et bilinéaire semblent surcharger de beaucoup comparativement au modèle linéaire.

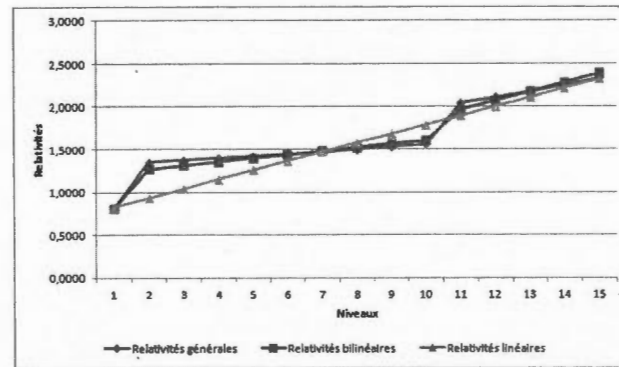


Figure 2.2: Distribution des formes de relativités du SBM $-1/0/+9$ selon la méthode asymptotique

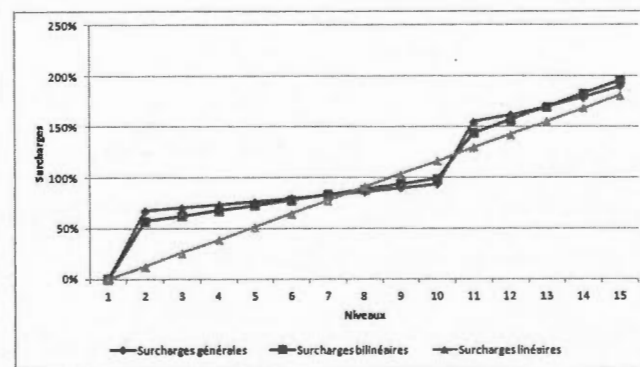


Figure 2.3: Distribution des formes de surcharges du SBM $-1/0/+9$ selon la méthode asymptotique

Tableau 2.3: Relativités estimées selon la méthode asymptotique

Méthode asymptotique								
	Relativités générales				Relativités bilinéaires			
Niveaux	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0,8160	0,8052	0,7965	0,7893	0,8183	0,8073	0,7984	0,7910
2	1,3648	1,3494	1,3378	1,3290	1,2783	1,2692	1,2649	1,2645
3	1,3876	1,3718	1,3600	1,3511	1,3243	1,3112	1,3038	1,3009
4	1,4113	1,3952	1,3831	1,3741	1,3703	1,3531	1,3427	1,3373
5	1,4360	1,4195	1,4073	1,3981	1,4162	1,3951	1,3816	1,3738
6	1,4618	1,4449	1,4324	1,4231	1,4622	1,4371	1,4204	1,4102
7	1,4887	1,4714	1,4587	1,4493	1,5082	1,4791	1,4593	1,4466
8	1,5168	1,4992	1,4863	1,4768	1,5542	1,5211	1,4982	1,4830
9	1,5464	1,5283	1,5152	1,5056	1,6002	1,5631	1,5371	1,5195
10	2,0400	1,5589	1,5456	1,5359	1,9320	1,6050	1,5759	1,5559
11	2,0978	2,0482	1,5776	1,5679	2,0434	1,9664	1,6148	1,5923
12	2,1631	2,1071	2,0642	1,6017	2,1547	2,0718	2,0078	1,6287
13	2,2380	2,1730	2,1247	2,0866	2,2661	2,1772	2,1086	2,0529
14	2,3254	2,2477	2,1922	2,1494	2,3775	2,2825	2,2094	2,1500
15	2,4299	2,3335	2,2681	2,2192	2,4888	2,3879	2,3102	2,2470

Relativités linéaires				
Niveaux	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0,8358	0,8264	0,8196	0,8150
2	0,9518	0,9333	0,9187	0,9072
3	1,0678	1,0402	1,0179	0,9994
4	1,1837	1,1471	1,1170	1,0916
5	1,2997	1,2539	1,2161	1,1838
6	1,4157	1,3608	1,3153	1,2760
7	1,5316	1,4677	1,4144	1,3682
8	1,6476	1,5746	1,5136	1,4604
9	1,7636	1,6815	1,6127	1,5526
10	1,8795	1,7883	1,7118	1,6448
11	1,9955	1,8952	1,8110	1,7370
12	2,1115	2,0021	1,9101	1,8292
13	2,2274	2,1090	2,0093	1,9214
14	2,3434	2,2158	2,1084	2,0136
15	2,4594	2,3227	2,2075	2,1058

Tableau 2.4: Surcharges estimées selon la méthode asymptotique

Méthode asymptotique								
	Surcharges générales				Surcharges bilinéaires			
Niveaux	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2	67%	68%	68%	68%	56%	57%	58%	60%
3	70%	70%	71%	71%	62%	62%	63%	64%
4	73%	73%	74%	74%	67%	68%	68%	69%
5	76%	76%	77%	77%	73%	73%	73%	74%
6	79%	79%	80%	80%	79%	78%	78%	78%
7	82%	83%	83%	84%	84%	83%	83%	83%
8	86%	86%	87%	87%	90%	88%	88%	87%
9	90%	90%	90%	91%	96%	94%	93%	92%
10	150%	94%	94%	95%	136%	99%	97%	97%
11	157%	154%	98%	99%	150%	144%	102%	101%
12	165%	162%	159%	103%	163%	157%	151%	106%
13	174%	170%	167%	164%	177%	170%	164%	160%
14	185%	179%	175%	172%	191%	183%	177%	172%
15	198%	190%	185%	181%	204%	196%	189%	184%

	Surcharges linéaires			
Niveaux	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0%	0%	0%	0%
2	14%	13%	12%	11%
3	28%	26%	24%	23%
4	42%	39%	36%	34%
5	55%	52%	48%	45%
6	69%	65%	60%	57%
7	83%	78%	73%	68%
8	97%	91%	85%	79%
9	111%	103%	97%	91%
10	125%	116%	109%	102%
11	139%	129%	121%	113%
12	153%	142%	133%	124%
13	166%	155%	145%	136%
14	180%	168%	157%	147%
15	194%	181%	169%	158%

2. Méthode non asymptotique

Tel qu'expliqué à la section 2.3, une autre méthode considérée dans l'approche classique consiste à inclure l'âge de la police dans l'estimation des primes relatives. Dans la base de données, l'âge de la police représente le nombre d'années de détention du permis de conduire (*nap*). Ce dernier comporte 76 valeurs distinctes allant de 0 à 76 dont 0 correspond à un assuré n'ayant pas d'expérience de conduite et 76, un assuré avec 76 années d'expérience de conduite. Deux modèles sont utilisés dans le cadre de la méthode non asymptotique :

- le premier modèle consiste à inclure toute l'expérience de conduite des assurés dans l'estimation des relativités. Le but de ce modèle est d'utiliser la totalité de la distribution du nombre d'années de détention du permis de conduire allant de 0 à 76 ans pour estimer les relativités bonus-malus à l'aide de l'équation (2.9) ;
- le deuxième modèle quant à lui, consiste à limiter l'expérience de conduite des assurés à un maximum de 10 ans. La limitation dans le cas de ce modèle vient du fait qu'il arrive que les assureurs décident d'extraire les données relatives à l'historique de réclamations passées de leurs assurés d'un fichier sinistre. Le fichier sinistre est une base de données centrale contenant l'historique des réclamations des assurés issus de différents assureurs. Une loi sur l'assurance permet aux compagnies d'assurance d'aller chercher dans le fichier sinistre jusqu'à 10 années passées d'expérience sinistre de leurs assurés afin de l'utiliser en fonction de leurs besoins. En supposant que la compagnie d'assurance estime les primes des assurés uniquement en se basant sur un maximum des 10 dernières années d'historique de leurs réclamations passées, il serait donc idéal d'utiliser un modèle qui considère cette option dans la tarification des primes.

Tel qu'expliqué à la sous-section 2.3.2, il s'agit donc d'estimer les relativités en

supposant une distribution initiale basée sur tous les niveaux de départ possibles et ainsi choisir les relativités dont le niveau de départ est optimal. Le niveau de départ optimal déterminé à l'aide de l'équation (2.10), sera le niveau dont la valeur de \bar{e} est maximale selon chaque SBM. Le tableau A.5 en annexe présente les résultats issus de l'estimation de \bar{e} en fonction de chaque forme de relativités. Selon le premier modèle de la méthode non asymptotique, les résultats indiquent que pour tous les SBM considérés, les niveaux 4 et 6 semblent être le niveau de départ optimal lorsqu'on estime les relativités générales et linéaires respectivement. Par contre, en utilisant les relativités bilinéaires, le niveau 4 est le niveau de départ optimal pour les SBM $-1/0/+8$, $-1/0/+9$ et $-1/0/+10$ tandis que le niveau 3 est le niveau de départ optimal pour le SBM $-1/0/+11$. Donc si on décide d'implanter par exemple les relativités générales pour estimer la prime des assurés, un nouvel assuré entrera dans le SBM au niveau 4 tandis qu'il entrera au niveau 6 si on décide plutôt d'utiliser les relativités linéaires pour déterminer la prime des assurés, ce qui est plus sévère. Quant au deuxième modèle de la méthode non asymptotique, le tableau A.3 en annexe indique que le niveau 11 semble être le niveau de départ optimal pour tous les SBM, et ce, en utilisant toutes les formes de relativités. Les niveaux de départ 12, 13, 14 et 15 ne peuvent être considérés selon ce modèle puisque si tous les assurés commencent à un niveau supérieur ou égal au niveau 12, personne ne se retrouverait à un niveau inférieur ou égal à 4 dépendamment de l'un de ces niveaux de départ parce qu'on n'utilise qu'un maximum de 10 ans de transition dans le cas du deuxième modèle.

Selon le premier modèle non asymptotique qui considère toute l'expérience de conduite des assurés dans l'estimation des relativités, une analyse des tableaux 2.5 et 2.6 indique que plus le système est sévère, plus les relativités et les surcharges diminuent. Ce phénomène s'explique de la même façon que dans le cas de la méthode asymptotique. Plus la pénalité augmente, plus la proportion de gens dans les bas niveaux de l'échelle bonus-malus diminue comparativement aux ni-

veaux élevés où la proportion augmente tel que l'indique le tableau A.4 en annexe. Cela implique moins de surcharges au fur et à mesure que la pénalité augmente. Quant aux relativités bilinéaires, les résultats présentés dans les tableaux 2.5 et 2.6 indiquent que le modèle bilinéaire semble pénaliser davantage les assurés que le modèle général. Les résultats indiquent aussi que le modèle linéaire semble moins surcharger dans les bas et hauts niveaux contrairement aux modèles général et bilinéaire tel que l'indiquent les figures 2.4 et 2.5. D'un point de vue global, les modèles général et bilinéaire semblent encore une fois, pénaliser sévèrement les assurés comparativement au modèle linéaire.

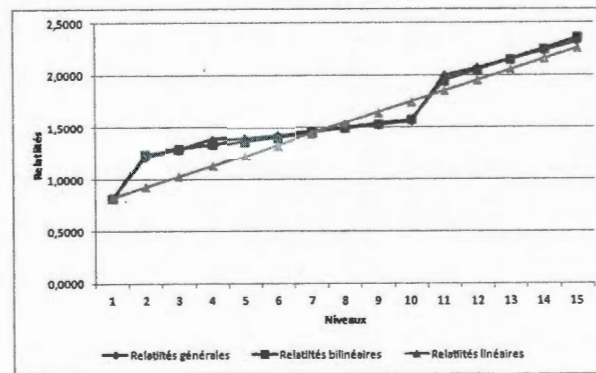


Figure 2.4: Distribution des formes de relativités du SBM $-1/0/+9$ selon la méthode non asymptotique qui considère toute l'expérience de conduite

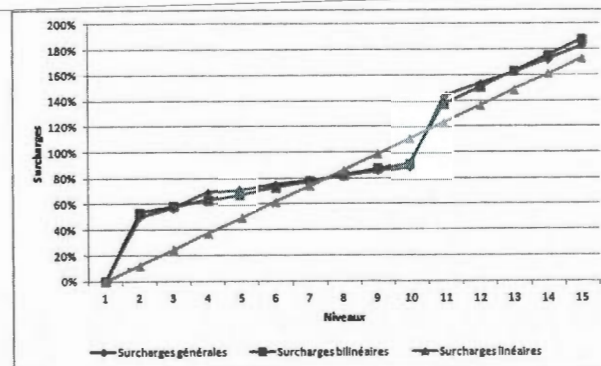


Figure 2.5: Distribution des formes de surcharges du SBM $-1/0/+9$ selon la méthode non asymptotique qui considère toute l'expérience de conduite

Tableau 2.5: Relativités estimées selon la méthode non asymptotique qui considère toute l'expérience de conduite

Méthode non asymptotique								
	Relativités générales				Relativités bilinéaires			
Niveaux	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0,8286	0,8193	0,8115	0,8049	0,8276	0,8179	0,8098	0,8065
2	1,2450	1,2292	1,2172	1,2075	1,2636	1,2559	1,2528	1,2604
3	1,3034	1,2868	1,2740	1,2644	1,3072	1,2957	1,2898	1,2953
4	1,4025	1,3851	1,3727	1,3631	1,3508	1,3355	1,3267	1,3302
5	1,4259	1,4080	1,3950	1,3854	1,3944	1,3753	1,3636	1,3651
6	1,4524	1,4344	1,4214	1,4118	1,4380	1,4151	1,4005	1,4001
7	1,4814	1,4614	1,4485	1,4393	1,4816	1,4549	1,4375	1,4350
8	1,5118	1,4912	1,4762	1,4674	1,5252	1,4947	1,4744	1,4699
9	1,5424	1,5226	1,5069	1,4962	1,5688	1,5345	1,5113	1,5048
10	1,9802	1,5546	1,5397	1,5281	1,9072	1,5744	1,5482	1,5397
11	2,0516	1,9983	1,5732	1,5623	2,0152	1,9456	1,5851	1,5746
12	2,1307	2,0706	2,0228	1,5977	2,1231	2,0481	1,9891	1,6096
13	2,2138	2,1500	2,0967	2,0524	2,2311	2,1506	2,0874	2,0446
14	2,3022	2,2324	2,1766	2,1280	2,3391	2,2531	2,1857	2,1398
15	2,4076	2,3191	2,2593	2,2093	2,4470	2,3556	2,2840	2,2350

Relativités linéaires				
Niveaux	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0,8351	0,8270	0,8212	0,8176
2	0,9456	0,9292	0,9164	0,9064
3	1,0562	1,0314	1,0115	0,9953
4	1,1668	1,1336	1,1067	1,0841
5	1,2774	1,2358	1,2018	1,1730
6	1,3879	1,3380	1,2969	1,2618
7	1,4985	1,4402	1,3921	1,3507
8	1,6091	1,5424	1,4872	1,4395
9	1,7197	1,6446	1,5824	1,5283
10	1,8302	1,7468	1,6775	1,6172
11	1,9408	1,8490	1,7726	1,7060
12	2,0514	1,9512	1,8678	1,7949
13	2,1620	2,0534	1,9629	1,8837
14	2,2725	2,1556	2,0581	1,9726
15	2,3831	2,2578	2,1532	2,0614

Tableau 2.6: Surcharges estimées selon la méthode non asymptotique qui considère toute l'expérience de conduite

Méthode non asymptotique								
	Surcharges générales				Surcharges bilinéaires			
Niveaux	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2	50%	50%	50%	50%	53%	54%	55%	56%
3	57%	57%	57%	57%	58%	58%	59%	61%
4	69%	69%	69%	69%	63%	63%	64%	65%
5	72%	72%	72%	72%	68%	68%	68%	69%
6	75%	75%	75%	75%	74%	73%	73%	74%
7	79%	78%	79%	79%	79%	78%	78%	78%
8	82%	82%	82%	82%	84%	83%	82%	82%
9	86%	86%	86%	86%	90%	88%	87%	87%
10	139%	90%	90%	90%	130%	92%	91%	91%
11	148%	144%	94%	94%	143%	138%	96%	95%
12	157%	153%	149%	98%	157%	150%	146%	100%
13	167%	162%	158%	155%	170%	163%	158%	154%
14	178%	172%	168%	164%	183%	175%	170%	165%
15	191%	183%	178%	174%	196%	188%	182%	177%

Surcharges linéaires				
Niveaux	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0%	0%	0%	0%
2	13%	12%	12%	11%
3	26%	25%	23%	22%
4	40%	37%	35%	33%
5	53%	49%	46%	43%
6	66%	62%	58%	54%
7	79%	74%	70%	65%
8	93%	87%	81%	76%
9	106%	99%	93%	87%
10	119%	111%	104%	98%
11	132%	124%	116%	109%
12	146%	136%	127%	120%
13	159%	148%	139%	130%
14	172%	161%	151%	141%
15	185%	173%	162%	152%

Selon le deuxième modèle non asymptotique qui limite l'expérience de conduite des assurés à un maximum de 10 ans, les tableaux 2.7 et 2.8 indiquent aussi que plus le système est sévère, plus les relativités générales diminuent. Il en est de même avec les surcharges générales dont la diminution est dans ce cas très marginale. Ce phénomène est principalement expliqué par le fait que quelque soit la pénalité 8, 9, 10 ou 11 à appliquer en cas de réclamation responsable, un assuré qui entre dans le SBM au niveau 11 occupera le niveau 15 la prochaine année après un sinistre responsable et a donc pratiquement la même chance de se retrouver plus ou moins rapidement aux plus bas niveaux dépendamment de chaque SBM. Une autre remarque faite sur le modèle général est que la relativité générale associée aux niveaux 4, 5 et 10, 11, 12, 13 des modèles $-1/0/ + 8$, $-1/0/ + 9$, $-1/0/ + 10$, $-1/0/ + 11$ respectivement est inférieure à celle du niveau précédent. Cela est généralement dû au fait qu'à ces différents niveaux cités précédemment, il y a une forte proportion des assurés comparativement aux niveaux qui les précèdent tel que l'indique le tableau A.2 en annexe. Par conséquent, le SBM semble donner moins de malus et donc moins de surcharges qu'aux niveaux précédents de ces différents systèmes. Une solution pour résoudre ce genre de problème est d'imposer une contrainte sur les relativités afin qu'elles soient croissantes selon les niveaux. C'est la raison principale de la modélisation des relativités linéaires. Une analyse des résultats indique que les relativités bilinéaires semble mieux performer en corrigeant les tendances irrégulières rencontrées au niveau des relativités générales. Les résultats indiquent aussi que les relativités et les surcharges linéaires sont en général moindres que celles des relativités générales. Encore une fois, les résultats montrent que les modèles général et bilinéaire semblent surcharger de beaucoup comparativement au modèle linéaire tel que l'indiquent les figures 2.6 et 2.7.

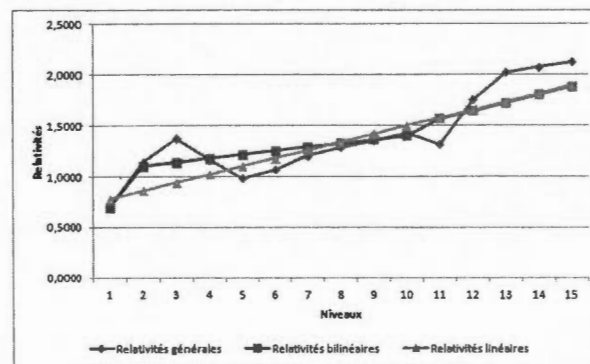


Figure 2.6: Distribution des formes de relativités du SBM $-1/0/+9$ selon la méthode non asymptotique qui limite l'expérience de conduite

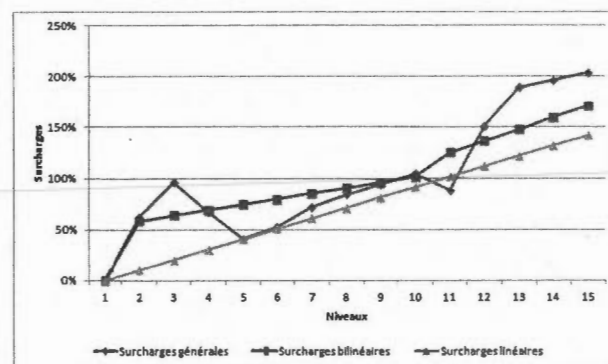


Figure 2.7: Distribution des formes de surcharges du SBM $-1/0/+9$ selon la méthode non asymptotique qui limite l'expérience de conduite

Tableau 2.7: Relativités estimées selon la méthode non asymptotique qui limite l'expérience de conduite

Méthode non asymptotique								
	Relativités générales				Relativités bilinéaires			
Niveaux	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0,6994	0,6994	0,6994	0,6994	0,6953	0,6958	0,6947	0,6935
2	1,1386	1,1385	1,1385	1,1385	1,0917	1,1029	1,1191	1,1348
3	1,3715	1,3714	1,3715	1,3715	1,1313	1,1399	1,1545	1,1687
4	1,1669	1,1666	1,1663	1,1661	1,1710	1,1769	1,1899	1,2026
5	0,9859	0,9852	0,9845	0,9839	1,2106	1,2139	1,2253	1,2366
6	1,0668	1,0665	1,0661	1,0658	1,2503	1,2509	1,2606	1,2705
7	1,2037	1,2036	1,2034	1,2032	1,2899	1,2879	1,2960	1,3045
8	1,2862	1,2861	1,2860	1,2860	1,3295	1,3249	1,3314	1,3384
9	1,3533	1,3532	1,3532	1,3531	1,3692	1,3619	1,3668	1,3723
10	1,2657	1,4295	1,4295	1,4295	1,5215	1,3989	1,4021	1,4063
11	1,7218	1,3152	1,5507	1,5507	1,6041	1,5673	1,4375	1,4402
12	2,0016	1,7572	1,3608	1,5850	1,6867	1,6466	1,5999	1,4742
13	2,0368	2,0243	1,8071	1,4286	1,7693	1,7258	1,6754	1,6325
14	2,0703	2,0737	2,0576	1,8791	1,8520	1,8050	1,7508	1,7048
15	2,1423	2,1270	2,1194	2,1039	1,9346	1,8843	1,8263	1,7770

	Relativités linéaires			
Niveaux	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0,7767	0,7812	0,7855	0,7893
2	0,8602	0,8606	0,8617	0,8629
3	0,9437	0,9400	0,9378	0,9366
4	1,0272	1,0195	1,0139	1,0103
5	1,1106	1,0989	1,0901	1,0839
6	1,1941	1,1783	1,1662	1,1576
7	1,2776	1,2577	1,2424	1,2312
8	1,3611	1,3371	1,3185	1,3049
9	1,4445	1,4166	1,3946	1,3785
10	1,5280	1,4960	1,4708	1,4522
11	1,6115	1,5754	1,5469	1,5259
12	1,6950	1,6548	1,6230	1,5995
13	1,7785	1,7342	1,6992	1,6732
14	1,8619	1,8136	1,7753	1,7468
15	1,9454	1,8931	1,8514	1,8205

Tableau 2.8: Surcharges estimées selon la méthode non asymptotique qui limite l'expérience de conduite

Méthode non asymptotique								
	Surcharges générales				Surcharges bilinéaires			
Niveaux	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2	63%	63%	63%	63%	57%	59%	61%	64%
3	96%	96%	96%	96%	63%	64%	66%	69%
4	67%	67%	67%	67%	68%	69%	71%	73%
5	41%	41%	41%	41%	74%	74%	76%	78%
6	53%	52%	52%	52%	80%	80%	81%	83%
7	72%	72%	72%	72%	86%	85%	87%	88%
8	84%	84%	84%	84%	91%	90%	92%	93%
9	93%	93%	93%	93%	97%	96%	97%	98%
10	81%	104%	104%	104%	119%	101%	102%	103%
11	146%	88%	122%	122%	131%	125%	107%	108%
12	186%	151%	95%	127%	143%	137%	130%	113%
13	191%	189%	158%	104%	154%	148%	141%	135%
14	196%	197%	194%	169%	166%	159%	152%	146%
15	206%	204%	203%	201%	178%	171%	163%	156%

Surcharges linéaires				
Niveaux	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0%	0%	0%	0%
2	11%	10%	10%	9%
3	21%	20%	19%	19%
4	32%	30%	29%	28%
5	43%	41%	39%	37%
6	54%	51%	48%	47%
7	64%	61%	58%	56%
8	75%	71%	68%	65%
9	86%	81%	78%	75%
10	97%	91%	87%	84%
11	107%	102%	97%	93%
12	118%	112%	107%	103%
13	129%	122%	116%	112%
14	140%	132%	126%	121%
15	150%	142%	136%	131%

2.5.6 Utilisation du nombre d'années de détention du permis de conduire

La méthode asymptotique ne tient pas compte du nombre d'années depuis l'obtention du permis de conduire dans l'estimation des relativités contrairement aux 2 modèles de la méthode non asymptotique qui en tiennent compte. Les différents résultats obtenus selon les 2 méthodes montrent à quel point l'utilisation de l'âge de la police est un aspect important à prendre en considération dans la tarification des primes (Borgan, Hoem et Norberg, 1981). Plus spécifiquement, les résultats indiquent que la méthode asymptotique semble pénaliser davantage les assurés que la méthode non asymptotique. Cela est principalement dû à la convergence de la distribution des assurés dans les niveaux de l'échelle bonus-malus. L'analyse des tableaux A.1, A.2 et A.4 en annexe indique que la proportion des assurés selon la méthode non asymptotique est différente de celle obtenue avec la méthode asymptotique. Selon le premier modèle non asymptotique, on remarque une forte proportion des assurés dans les bas niveaux et une faible proportion dans les niveaux élevés de l'échelle bonus-malus contrairement à la méthode asymptotique. Par conséquent, on a moins d'escompte et moins de malus contrairement à la méthode asymptotique. La très faible proportion des assurés obtenue dans le cas du deuxième modèle non asymptotique est dû au niveau de départ optimal qui est le niveau 11. Les assurés entrant initialement dans le SBM à ce niveau, ont moins de chance de se retrouver plus rapidement dans les bas niveaux du SBM. De manière globale, les différents résultats montrent qu'il y a une proportion non négligeable de jeunes polices dans le portefeuille d'assurance dont la distribution ne converge pas assez vite à l'état stationnaire; raison pour laquelle il faudrait en tenir compte dans la tarification des primes.

2.5.7 Limitation de l'expérience de conduite

Au lieu d'utiliser toute l'expérience de conduite des assurés pour estimer les relativités bonus-malus, le deuxième modèle de la méthode non asymptotique consiste

à limiter l'expérience de conduite des assurés à un maximum de 10 ans. Donc même pour les assurés ayant plus de 10 ans d'expérience de conduite dans la base de données, le deuxième modèle n'utilise que 10 années de transition pour estimer les relativités bonus-malus. Selon les différents résultats obtenus, le nombre d'années de transition utilisé pour estimer les primes relatives du SBM peut aussi avoir un impact majeur dans le sens où, en le limitant à un maximum de 10 ans, les résultats semblent être complètement différents du premier modèle qui considère toute l'expérience de conduite des assurés. Il faudrait donc tenir compte de tous ces aspects dans la tarification puisque dans la vraie vie, il est assez difficile d'obtenir l'historique de toutes les réclamations passées des assurés d'un portefeuille à moins que cet assuré soit couvert par la même compagnie d'assurance depuis sa première année de couverture.

2.5.8 Évaluation des systèmes bonus-malus

Après l'estimation des relativités selon les différentes méthodes, une étape importante de la calibration des systèmes bonus-malus est l'évaluation de ces derniers afin d'analyser la qualité de prédiction des primes relatives. Tel que mentionné précédemment, certaines des métriques d'évaluation décrites plus tôt ne sont pas utilisées dans ce mémoire soit parce qu'elles sont similaires à l'une des métriques utilisées soit parce que la quantification de ces dernières est moins précise. Une chose importante à noter est que la majorité des métriques d'évaluation énumérées précédemment est utilisée dans un cadre asymptotique, mais certaines d'entre elles peuvent s'appliquer dans un cadre non asymptotique.

1. Méthode asymptotique

Dans un contexte asymptotique, les primes relatives de tous les modèles bonus-

malus $-1/0/ + x$, $x = 1, 2, \dots, 14$ ont été estimées et ces différents modèles ont été évalués afin de voir lequel de ces systèmes prédit le mieux le nombre de réclamations. Le modèle $-1/0/ + 15$ n'est pas considéré parce qu'il est similaire au modèle $-1/0/ + 14$. Dans les 2 cas, un assuré étant au niveau 1 par exemple se retrouvera au niveau 15 à la prochaine période assurable après avoir réclamé au moins 1 sinistre responsable. Par conséquent, les relativités devraient être les mêmes. Les tableaux 2.9 et 2.10 résument les différentes métriques utilisées pour évaluer les systèmes bonus-malus. Le coefficient de variation CV ainsi que l'erreur carrée moyenne de prédiction ECM sont des métriques qui varient uniquement selon le type de modèle bonus-malus, c'est-à-dire selon la pénalité à appliquer en cas de réclamation responsable.

En ce qui a trait au coefficient de variation, il a juste été calculé en terme de nombre de réclamations et non en terme de coût total puisque le présent ouvrage fait l'objet d'une étude sur le nombre de réclamations. Une analyse du tableau 2.9 indique que plus le système est sévère, plus le coefficient de variation augmente tel que stipulé dans la littérature actuarielle. Par contre, le modèle $-1/0/ + 8$ semble être le meilleur modèle selon l'erreur carrée moyenne de prédiction dont on aimerait avoir une valeur proche de 0. Donc ce modèle semble mieux prédire la prime à attribuer à chaque assuré en fonction de son niveau de risque. Une analyse du tableau 2.10 semble indiquer que plus le système est sévère, plus le niveau moyen stationnaire augmente. Une fois l'état stationnaire atteint et lorsque le système est moins sévère, il semble avoir une forte concentration des assurés dans les bas niveaux. Par conséquent, la prime moyenne stationnaire est basse puisque le système n'est pas assez sévère pour pénaliser les mauvais assurés qui retournent assez rapidement aux plus bas niveaux. Par contre, lorsque les pénalités sont plus élevées, la métrique est encore bien loin du 50% voulue comme valeur optimale et ce, pour toutes les formes de relativités. En ce qui a trait à l'élasticité, les modèles bonus-malus $-1/0/ + 11$ et $-1/0/ + 10$ semblent être les systèmes

les mieux performants selon les modèles général, bilinéaire et linéaire respectivement puisqu'on aimerait avoir une élasticité proche de 1. Selon cette métrique, le modèle général semble être le meilleur modèle avec une plus grande élasticité. La troisième métrique du tableau 2.10 représente la différence carrée moyenne Q efficient, quantité qu'on minimise pour obtenir les différentes formules de relativités. La différence entre cette métrique et l'erreur carrée moyenne de prédiction vient simplement du fait que cette dernière inclut la fréquence de réclamation. La valeur Q efficient n'est rien d'autre que la différence entre la relativité inconnue θ et la relativité estimée r_i . L'objectif principal de cette quantité est d'une part, de voir à quel point la précision du modèle change lorsqu'on impose des contraintes sur les relativités et d'autre part, d'obtenir une valeur proche de 0 puisque le but premier est de trouver une valeur qui approxime la prime relative inconnue θ . On peut clairement remarquer que les valeurs obtenues selon cette métrique ne sont pas si différentes selon les modèles général, linéaire et bilinéaire. De plus, les modèles $-1/0/+9$ et $-1/0/+8$ semblent être les meilleurs systèmes selon les modèles général, bilinéaire et linéaire respectivement. D'un point de vue global, les modèles bonus-malus $-1/0/+8$, $-1/0/+9$, $-1/0/+10$ et $-1/0/+11$ semblent être les meilleurs modèles prédisant le mieux le nombre de réclamations selon la méthode asymptotique; raison pour laquelle ces systèmes ont été considérés pour applications.

2. Méthode non asymptotique

Certaines métriques servant à évaluer les modèles bonus-malus selon la méthode asymptotique sont généralisées et appliquées dans un cadre non asymptotique. Selon les deux modèles de la méthode non asymptotique, il s'agit d'inclure le niveau de départ optimal et l'âge de police représentant le nombre d'années de détention du permis de conduire. Le niveau moyen stationnaire (RSAL) est la métrique d'évaluation qui ne peut être utilisée dans un cadre non asymptotique

Tableau 2.9: Métriques d'évaluation variant selon la pénalité en utilisant la méthode asymptotique

SBM	CV	ECM
-1/0/+1	0,2939	0,00313
-1/0/+2	0,3302	0,00280
-1/0/+3	0,3572	0,00249
-1/0/+4	0,3771	0,00226
-1/0/+5	0,3914	0,00212
-1/0/+6	0,4013	0,00204
-1/0/+7	0,4081	0,00202
-1/0/+8	0,4126	0,00201
-1/0/+9	0,4155	0,00202
-1/0/+10	0,4174	0,00205
-1/0/+11	0,4186	0,00208
-1/0/+12	0,4194	0,00213
-1/0/+13	0,4199	0,00218
-1/0/+14	0,4202	0,00225

puisqu'elle requiert que la distribution des assurés dans les niveaux de l'échelle bonus-malus soit stationnaire. De plus, seuls les modèles bonus-malus $-1/0/+8$, $-1/0/+9$, $-1/0/+10$ et $-1/0/+11$ qui semblent être les modèles bonus-malus les mieux performants selon la méthode asymptotique sont considérés dans un contexte non asymptotique.

Le tableau 2.11 présente les valeurs obtenues du coefficient de variation ainsi que de l'erreur carrée moyenne de prédiction du portefeuille. La notation $nap \in [0, 76]$ dans le tableau fait référence au premier modèle non asymptotique qui considère toute l'expérience de conduite, tandis que $nap \in [0, 10]$ réfère au deuxième modèle non asymptotique qui limite l'expérience de conduite des assurés à un maximum de 10 ans. On remarque que le coefficient de variation est semblable selon les

Tableau 2.10: Métriques d'évaluation variant selon la pénalité et la forme de relativités en utilisant la méthode asymptotique

SBM	modèle général			modèle bilinéaire			modèle linéaire		
	RSAL	Elasticité	Q efficient	RSAL	Elasticité	Q efficient	RSAL	Elasticité	Q efficient
-1/0/+1	0,0041	0,0260	0,6602	0,0034	0,0261	0,6602	0,0026	0,0259	0,6602
-1/0/+2	0,0115	0,0528	0,6328	0,0108	0,0525	0,6331	0,0085	0,0477	0,6354
-1/0/+3	0,0227	0,0804	0,6040	0,0225	0,0796	0,6045	0,0186	0,0708	0,6085
-1/0/+4	0,0375	0,1094	0,5796	0,0380	0,1082	0,5802	0,0325	0,0969	0,5854
-1/0/+5	0,0556	0,1387	0,5623	0,0559	0,1373	0,5630	0,0491	0,1244	0,5690
-1/0/+6	0,0725	0,1650	0,5517	0,0744	0,1634	0,5524	0,0668	0,1495	0,5593
-1/0/+7	0,0962	0,1868	0,5465	0,0934	0,1845	0,5472	0,0849	0,1693	0,5548
-1/0/+8	0,1140	0,2004	0,5442	0,1088	0,1983	0,5448	0,1011	0,1823	0,5533
-1/0/+9	0,1274	0,2085	0,5440	0,1219	0,2068	0,5444	0,1160	0,1897	0,5540
-1/0/+10	0,1383	0,2126	0,5454	0,1334	0,2113	0,5458	0,1300	0,1925	0,5564
-1/0/+11	0,1473	0,2136	0,5482	0,1436	0,2126	0,5484	0,1433	0,1918	0,5600
-1/0/+12	0,1550	0,2122	0,5520	0,1527	0,2114	0,5521	0,1562	0,1883	0,5646
-1/0/+13	0,1617	0,2088	0,5568	0,1611	0,2083	0,5569	0,1687	0,1829	0,5698
-1/0/+14	0,2428	0,2039	0,5626	0,2457	0,2037	0,5626	0,1809	0,1759	0,5754

2 modèles non asymptotiques et aussi similaire à celui obtenu avec la méthode asymptotique. L'erreur carrée moyenne de prédiction quant à elle semble favoriser le modèle bonus-malus $-1/0/+8$ avec sa plus petite valeur. Cela montre à quel point la qualité de prédiction du nombre de réclamations est bonne avec des valeurs d'ECM proches de 0. Le tableau 2.12 présente les résultats obtenus des 2 autres métriques. Selon le premier modèle non asymptotique, l'élasticité du portefeuille est aussi faible que celle obtenue selon la méthode asymptotique principalement au niveau des relativités générales. L'élasticité plus élevée obtenue dans le cas du deuxième modèle est principalement dû à la forte proportion des assurés dans les bas niveaux bonus-malus notamment aux niveaux 2 et 3 en comparant les tableaux A.1, A.2 et A.4 en annexe. Rappelons que les relativités

générales estimées selon le deuxième modèle non asymptotique présentent des tendances irrégulières. Cela influence beaucoup la réaction du système à changer de prime suite à un changement de la fréquence de réclamation. L'élasticité semble favoriser les modèles bonus-malus plus sévères. En ce qui a trait à la différence carrée moyenne Q efficient, on peut clairement noter la différence très marginale obtenue entre toutes les formes de relativités. Ce qui montre encore une fois que les contraintes imposées sur les relativités n'influencent pas vraiment la précision dans la prédiction.

Le tableau 2.13 présente les résultats obtenus du taux de convergence moyen du portefeuille selon chaque modèle bonus-malus. Cette métrique n'est juste considérée que dans le cas du premier modèle non asymptotique puisqu'elle requiert l'utilisation de toute l'expérience de conduite afin de voir à quel point la distribution des assurés converge assez rapidement à la distribution stationnaire. C'est une métrique très influencée par le niveau de départ optimal obtenu selon chaque forme de relativité. Une analyse du tableau montre que le modèle bonus-malus $-1/0/+8$ semble être le modèle dont la distribution des assurés converge assez rapidement à la distribution stationnaire puisqu'on aimerait avoir une valeur proche de 0. La figure 2.8 montre l'évolution du taux de convergence de l'échelle bonus-malus $-1/0/+8$ selon les 3 formes de relativités en fonction de leur niveau de départ optimal respectif. On note une convergence rapide les premières années et par après, une convergence plus lente à la distribution stationnaire. En prenant un seuil d'erreur de différence $\epsilon = 0.02$, la convergence est atteinte après approximativement 20 années avec $TC_{20} \leq 0.02$ pour les 3 formes de relativités. Dans le portefeuille, il y a une proportion non négligeable de polices ayant moins de 20 ans d'expérience de conduite. C'est la raison principale pour laquelle il faudrait tenir compte de la méthode non asymptotique dans la tarification des primes.

Tableau 2.11: Métriques d'évaluation variant selon la pénalité en utilisant la méthode non asymptotique

SBM	$nap \in [0, 76]$		$nap \in [0, 10]$	
	CV	ECM	CV	ECM
-1/0/+8	0,3980	0,002152	0,4016	0,00212
-1/0/+9	0,4009	0,002155	0,3998	0,00216
-1/0/+10	0,4029	0,002170	0,3987	0,00220
-1/0/+11	0,4043	0,002196	0,3979	0,00224

2.6 Problème de l'approche classique

2.6.1 Explication

L'estimation des relativités selon l'approche classique passe par 2 grandes étapes distinctes. Après la tarification *a priori* qui subdivise le portefeuille d'assurance en plusieurs classes de risque homogènes, la première étape consiste à ajuster une distribution d'hétérogénéité dans le portefeuille d'assurance, en estimant les paramètres de la distribution d'hétérogénéité du portefeuille. La raison principale de cet ajustement vient du fait qu'après la tarification *a priori*, il est bien connu que le portefeuille d'assurance est encore hétérogène parce qu'il existe certaines caractéristiques du risque ne pouvant être prises en compte dans la tarification *a priori* soit parce qu'elles ne sont pas observables, ou soit parce qu'elles sont difficilement mesurables. La deuxième étape quant à elle, consiste à approximer l'hétérogénéité par un système bonus-malus. La seconde étape n'a donc plus aucun lien direct avec la base de données en ce qui a trait à l'estimation des primes relatives. De manière globale, l'approche classique utilise 2 grandes étapes distinctes où le seul lien existant entre les 2 étapes est l'ajustement du portefeuille d'assurance par une distribution d'hétérogénéité. Cette approche d'estimation des primes relatives pourrait résulter en une perte de précision au niveau des relativités estimées puisqu'une bonne part du processus d'estimation des relativités n'a plus de lien direct avec la base de données qui reste la source principale d'information renseignant sur le

Tableau 2.12: Métriques d'évaluation variant selon la pénalité et la forme de relativité en utilisant la méthode non asymptotique

	modèle général		modèle bilinéaire		modèle linéaire	
	Elasticité Q efficient		Elasticité Q efficient		Elasticité Q efficient	
SBM	nap ∈ [0, 76]					
-1/0/+8	0,1792	0,5647	0,1788	0,5648	0,1704	0,5698
-1/0/+9	0,1860	0,5639	0,1859	0,5641	0,1765	0,5700
-1/0/+10	0,1898	0,5646	0,1899	0,5647	0,1789	0,5717
-1/0/+11	0,1912	0,5664	0,1907	0,5665	0,1783	0,5744
	nap ∈ [0, 10]					
-1/0/+8	0,2320	0,5491	0,2158	0,5624	0,1757	0,5811
-1/0/+9	0,2273	0,5532	0,2134	0,5647	0,1718	0,5839
-1/0/+10	0,2234	0,5569	0,2109	0,5674	0,1681	0,5866
-1/0/+11	0,2195	0,5608	0,2087	0,5697	0,1648	0,5889

comportement des assurés. En plus, cela sépare la tarification *a priori* de la tarification *a posteriori* créant par exemple la situation où on utilise les paramètres estimés (coefficients de régression) déjà choisis par la compagnie d'assurance pour ensuite estimer les relativités bonus-malus tel qu'expliqué à la sous-section 2.5.1.

Tableau 2.13: Taux de convergence moyen du portefeuille

SBM	TC		
	général	bilinéaire	linéaire
-1/0/+8	0,0644	0,0644	0,1060
-1/0/+9	0,0688	0,0688	0,1108
-1/0/+10	0,0728	0,0728	0,1105
-1/0/+11	0,0770	0,0599	0,1075

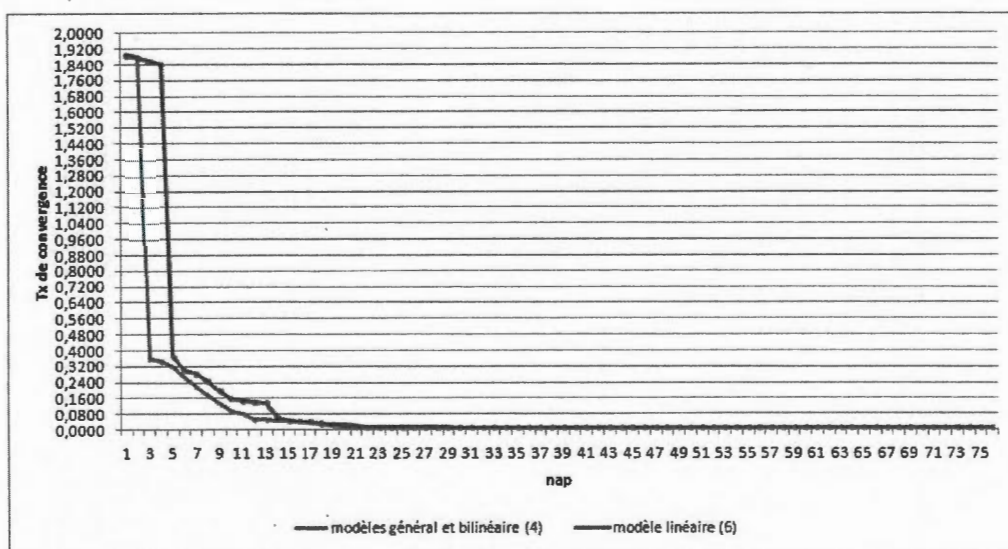


Figure 2.8: Evolution de la convergence à la distribution stationnaire du SBM $-1/0/+8$ pour les modèles général, bilinéaire et linéaire

2.6.2 Solution

Idéalement, il est plus convenable de passer directement de la base de données à un système bonus-malus en estimant de manière simultanée les paramètres de la tarification *a priori* (c'est à dire l'impact des caractéristiques connues du risque sur le nombre de réclamations) et les relativités (rabais/majorations) du système bonus-malus. D'un point de vue mathématique :

1. on pose $\lambda_t = \exp(X_t' \beta)$ où
 - X_t représente le vecteur comportant les caractéristiques des assurés pour l'année t
 - β représente le vecteur des coefficients relatifs à l'estimation de la fréquence de réclamation
2. les paramètres β servant à l'estimation de la fréquence de réclamation λ ainsi que les relativités r_l associées au niveau l du SBM, sont estimés simultanément à l'aide des modèles de régression. Rappelons que, afin d'imiter la tarification a

priori actuelle de la compagnie, le paramètre λ n'est plus estimé puisqu'il est déjà disponible dans la base de données, c'est-à-dire qu'il est estimé avec les coefficients de régressions $\hat{\beta}$ déjà choisis par la compagnie d'assurance.

CHAPITRE III

CALIBRATION DES SYSTÈMES BONUS-MALUS - APPROCHE STATISTIQUE

L'approche statistique est proposée dans le cadre du mémoire dans le sens où elle s'adapte bien au problème de l'approche classique expliquée dans la section 2.6. Elle estime le système bonus-malus en une seule étape. L'approche statistique consiste à estimer directement les relativités bonus-malus en utilisant les modèles de régression. Dans le cadre de l'approche statistique, 2 méthodes d'estimation sont considérées. La première méthode consiste à estimer les relativités bonus-malus en utilisant une partie de l'historique des réclamations des assurés. Cet historique disponible dans la base de données, peut aller jusqu'à un maximum de 10 ans passés dépendamment du nombre d'années de détention du permis de conduire des assurés du portefeuille. La deuxième méthode quant à elle consiste à estimer les relativités bonus-malus en n'utilisant pas l'historique des réclamations passées des assurés disponible dans la base de données. Le but de la deuxième méthode est de voir à quel point les relativités et les surcharges bonus-malus changent lorsqu'on n'utilise pas l'historique des réclamations. Dans la première partie du chapitre 3, on décrira les différents modèles considérés selon chaque méthode statistique ainsi que la distribution du nombre de réclamations liée à chaque modèle statistique. Ensuite, on expliquera la façon dont on évalue la performance des systèmes bonus-malus à l'aide des critères classiques statistiques. Les résultats obtenus de l'application des différentes méthodes statistiques sur les données d'assurance utilisées seront présentés. Enfin, une comparaison des 2 approches classique et statistique sera faite.

3.1 Méthode utilisant l'historique des réclamations

Selon cette méthode statistique, le processus d'estimation des relativités bonus-malus peut être défini comme suit :

1. on trouve le niveau bonus-malus des assurés selon chaque système bonus-malus en fonction de leur historique de réclamations passées, pouvant aller jusqu'à un maximum de 10 ans ;
2. on utilise ce niveau bonus-malus comme variable explicative à inclure dans le paramètre de moyenne de la distribution du nombre de réclamations en supposant que le niveau qu'occupe l'assuré dans le système bonus-malus pourrait avoir un impact sur le nombre de réclamations.

Cette méthode statistique est considérée sous 2 modèles. Le premier modèle statistique consiste à estimer les relativités bonus-malus en considérant toute l'expérience de conduite des assurés. Le deuxième modèle quant à lui, consiste à estimer les relativités bonus-malus en ne se basant que sur l'historique considérée dans l'analyse. Selon le deuxième modèle, on suppose que les assureurs estiment les primes des assurés en ne se basant que sur l'historique de leurs réclamations qu'ils peuvent extraire d'un fichier sinistre tel qu'expliqué à la sous-section 2.5.5 au niveau de la partie traitant de la méthode non asymptotique.

3.1.1 Modèle statistique considérant toute l'expérience de conduite

Pour estimer les relativités bonus-malus, ce modèle utilise d'une part l'historique de réclamations pouvant aller jusqu'à un maximum de 10 ans. D'autre part, il considère aussi l'expérience de conduite additionnelle des assurés ayant plus de 10 ans d'expérience de conduite. La modélisation du nombre de réclamations totales selon ce modèle statistique est la suivante : on note e , le niveau qu'occupe l'assuré au début de l'historique

des réclamations passées et l , le niveau qu'il occupe dans le système bonus-malus après t ($t \leq 10$) années, en commençant au niveau e où $e, l = 1, \dots, s$ avec s représentant le niveau maximal du système bonus-malus. De ce fait,

- soit $N^F|e, l \sim \text{Poisson}(\lambda^F r_l)$ où N^F représente le nombre de réclamations responsables et λ^F la fréquence de réclamation responsable;
- soit $N^{Fc}|e, l \sim \text{Poisson}(\lambda^{Fc} r_l)$ où N^{Fc} représente le nombre de réclamations non responsables et λ^{Fc} la fréquence de réclamation non responsable;
- on pose $N = N^F + N^{Fc}$ le nombre de réclamations totales indépendamment du caractère responsable ou non. On suppose que le nombre de réclamations responsables est conditionnellement à e , indépendant du nombre de réclamations non responsables. Par indépendance, $N|e, l \sim \text{Poisson}(\lambda r_l)$ où $\lambda = \lambda^F + \lambda^{Fc}$ représente la fréquence de réclamation totale; r_l représente la relativité associée au niveau l du SBM.

En se basant sur ces hypothèses et en utilisant les méthodes par conditionnement, on peut aisément montrer que la distribution conjointe temporelle du nombre total de réclamations est la suivante :

$$\begin{aligned}
 \Pr[N_1 = n_1, \dots, N_T = n_T] &= \sum_{e=1}^s \left[\left(\prod_{t=1}^T \Pr[N_t = n_t|e, l] \right) \times p_e \right] \\
 &= \sum_{e=1}^s \left[\left(\prod_{t=1}^T \frac{\exp(-\lambda_t r_{tl}) (\lambda_t r_{tl})^{n_t}}{n_t!} \right) \times p_e \right] \\
 &= \sum_{e=1}^s \left[\left(\exp \left(- \sum_{t=1}^T \lambda_t r_{tl} \right) \prod_{t=1}^T \frac{(\lambda_t r_{tl})^{n_t}}{n_t!} \right) \times p_e \right] \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

où r_{tl} représente la relativité associée au niveau l du SBM après t années d'expérience de conduite, occupé par un assuré qui commence au niveau e au début de l'historique. La composante p_e représente la probabilité que l'assuré soit au niveau e de l'échelle bonus-malus au début de l'historique. En terme mathématique,

$$p_e = \Pr[L_{(t=1)} = e] \quad e = 1, \dots, s.$$

Pour illustrer le concept de cette distribution, supposons un assuré avec 2 périodes assurables, 2005 et 2006, tel que présenté dans le tableau 3.1. Les notations N_t, N_t^F, N_t^{Fc} représentent le nombre de réclamations totales, responsables et non responsables de l'assuré durant la période t . Les notations $\{N_{-1}^F, N_{-2}^F, \dots, N_{-10}^F\}$ et $\{N_{-1}^{Fc}, N_{-2}^{Fc}, \dots, N_{-10}^{Fc}\}$ représentent l'historique du nombre de réclamations responsables et non responsables respectivement. Prenons le premier contrat de l'assuré. En supposant que l'assuré commence au niveau $e = 1$ d'un SBM à 15 niveaux avec échelle $-1/0/+9$, il restera au niveau $l = 1$ parce qu'il n'a pas eu de réclamations durant ses 2 dernières années d'expérience tel que le montre le tableau 3.1. Par contre, en considérant son deuxième contrat d'assurance, les données montrent qu'il a eu un sinistre responsable durant son contrat passé. Suite à une mise à jour de l'historique de ses réclamations, l'assuré se retrouve donc au niveau $l = 10$ après 3 années d'expérience sinistre. La distribution conjointe du nombre total de réclamations de cet assuré sachant qu'il commence au niveau $e = 1$ au début de l'historique est la suivante :

$$\begin{aligned} \Pr[N_1 = 1, N_2 = 0 | e = 1] &= \prod_{t=1}^2 \Pr[N_t = n_t | e = 1] \\ &= \exp \left[-(\lambda_1 r_{1,1} + \lambda_2 r_{2,10}) \right] \times (\lambda_1 r_{1,1}). \end{aligned}$$

Tableau 3.1: Exemple descriptif de r_{il} en fonction du niveau e

Assuré	Année	t	nap	N_t	N_t^F	N_t^{Fc}
1	2005	1	2	1	1	0
1	2006	2	3	0	0	0

N_{-1}^F	N_{-2}^F	N_{-3}^F	N_{-4}^F	\dots	N_{-10}^F	N_{-1}^{Fc}	N_{-2}^{Fc}	N_{-3}^{Fc}	N_{-4}^{Fc}	\dots	N_{-10}^{Fc}	e	l
0	0	.	.	\dots	.	0	0	.	.	\dots	.	1	1
1	0	0	.	\dots	.	0	0	0	.	\dots	.	1	10

1. Détermination de la probabilité p_e

Tel que spécifié plus tôt, la base de données utilisée ne contient que l'historique des réclamations passées pouvant aller jusqu'à un maximum de 10 ans. En notant u , le nombre d'années depuis l'obtention du permis de conduire de l'assuré, k le niveau de départ des assurés dans l'échelle bonus-malus et s , le niveau maximal du SBM, la probabilité p_e issue de l'équation (3.1) est définie comme suit :

- pour ceux ayant 10 années ou moins d'expérience de conduite ($u \leq 10$), étant donné qu'on dispose de toute leur historique, le niveau e qu'occupe l'assuré au début de l'historique correspond au niveau de départ choisi initialement pour tous les assurés. La composante p_e représente donc un vecteur de probabilités à s éléments où $p_e = 1$ si $e = k$ et 0 autrement ;

- un problème se pose en ce qui a trait aux assurés ayant plus de 10 ans d'expérience de conduite ($u \geq 10$). En effet, en considérant un SBM à 15 niveaux avec échelle $-1/0/+9$, l'assuré ayant 11 années d'expérience de conduite qui commence au niveau 1 du SBM initialement, peut se retrouver aux niveaux 1, 10 ou 15, après une année d'expérience dépendamment du nombre d'accidents déclarés, mais ce nombre de réclamations de la première période n'est pas disponible parce qu'il n'y a que ses 10 années passées d'historique de réclamations disponibles dans la base de données. Il faudra donc estimer les probabilités de chaque assuré, ayant plus de 10 années d'expérience de conduite, d'être aux différents niveaux probables e du SBM au début de l'historique. Par la suite, il s'agira d'utiliser ces différents niveaux probables e de chaque assuré pour calculer les niveaux bonus-malus l qu'occuperont les assurés en utilisant l'historique. De ce qui précède, pour ($u \geq 10$), p_e représente en fait la probabilité de l'assuré de se retrouver au niveau e après $u - 10$ années d'expérience de conduite en commençant au niveau de départ choisi initialement pour tous les assurés. La probabilité p_e représente donc la k^e

ligne de la matrice de probabilité de transition $P(\lambda, r_l)$ à la puissance $u - 10$ de la forme suivante :

$$P(\lambda, r_l) = \begin{pmatrix} p_{11}(\lambda r_1) & p_{12}(\lambda r_1) & \cdots & p_{1s}(\lambda r_1) \\ p_{21}(\lambda r_2) & p_{22}(\lambda r_2) & \cdots & p_{2s}(\lambda r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{s1}(\lambda r_s) & p_{s2}(\lambda r_s) & \cdots & p_{ss}(\lambda r_s) \end{pmatrix},$$

où λ représente la fréquence de réclamation de l'assuré et r_1, \dots, r_s , les relativités bonus-malus estimées par maximum de vraisemblance. La composante $p_{ij}(\lambda r_l)$ dans la matrice de transition représente la probabilité qu'un assuré ayant une fréquence de réclamation λr_l et commençant au niveau i au début de la période, se retrouve au niveau j après une année ($i, j = 1, \dots, s$). Cette matrice de probabilité de transition est similaire à celle décrite à la sous-section 2.5.3 du chapitre 2. La probabilité $p_{ij}(\lambda r_l)$ peut être déterminée en supposant une loi de Poisson ou binomiale négative dépendamment des hypothèses que l'on pose dans la modélisation du nombre de réclamations. Il est à noter que la somme totale des éléments de p_e est égale à 1.

2. Attribution d'un niveau unique

La distribution du nombre de réclamations décrite à l'équation (3.1) est basée sur une logique de niveaux probables e au début de l'historique. En reprenant l'exemple de l'assuré ayant 11 années d'expérience de conduite, cet assuré pourrait se retrouver après un an d'expérience, à plusieurs niveaux probables e . Ces derniers sont ensuite utilisés pour déterminer les niveaux l de l'assuré après 10 ans d'expérience sinistre. L'assuré se retrouve donc à plusieurs niveaux de l'échelle bonus-malus. En fait, dans la vraie vie, il faut assigner un niveau unique à l'assuré en fonction du nombre de sinistres qu'il a déclarés selon la logique du système bonus-malus. C'est en fonction de ce niveau unique, que l'assureur lui charge la relativité correspondante pour déterminer sa prime. Une situation pour illustrer

le concept est le cas où l'assuré appelle son assureur pour connaître le niveau qu'il occupe dans l'échelle bonus-malus. L'assureur ne fournirait pas à l'assuré les informations sur plusieurs niveaux mais évidemment sur le niveau qui le correspond. Il faudrait donc trouver une façon d'attribuer à tous les assurés ayant plus de 10 ans d'expérience de conduite, un niveau unique e au début de l'historique afin de leur appliquer la relativité associée au niveau l qu'ils occuperont après 10 ans d'expérience sinistre en commençant à ce niveau unique e . Plusieurs scénarios se posent à cet effet. À l'aide de la relativité moyenne \bar{r} de chaque assuré,

- le premier scénario consiste à attribuer à l'assuré le niveau inférieur selon lequel la relativité moyenne est entre la relativité associée au niveau inférieur et la relativité associée au niveau supérieur, c'est-à-dire le niveau j tel que $r_j \leq \bar{r} < r_{j+1}$;
- le deuxième scénario consiste à attribuer à l'assuré le niveau selon lequel la distance au carré entre la relativité moyenne et la relativité associée à un certain niveau est la plus petite, c'est-à-dire le niveau j tel que la distance $(\bar{r} - r_j)^2$ est minimale ;
- le troisième scénario n'est en fait que l'opposé du premier scénario dans le sens où il attribue à l'assuré le niveau supérieur selon lequel la relativité moyenne est entre la relativité associée au niveau inférieur et la relativité associée au niveau supérieur, c'est-à-dire le niveau $j + 1$ tel que $r_j < \bar{r} \leq r_{j+1}$.

Le niveau unique e sera donc le niveau issu du scénario optimal. Le scénario optimal est déterminé en fonction de la log-vraisemblance ; c'est le scénario dont la log-vraisemblance est maximale.

3.1.2 Modèle statistique qui limite l'expérience de conduite

Ce modèle statistique quant à lui n'utilise qu'une partie de l'expérience sinistre des assurés pour estimer les relativités bonus-malus. Cette partie correspond en fait à l'historique de réclamations disponible dans la base de données. Tel que spécifié plus tôt, il n'y a qu'un maximum de 10 ans passés d'historique. De ce fait, même pour les assurés ayant plus de 10 ans d'expérience de conduite, ce modèle ne considère que cet historique, sans prendre en compte leur expérience sinistre additionnelle. La distribution du nombre de réclamations utilisée au niveau de ce modèle n'est rien d'autre que celle de l'équation (3.1) à l'exception que la définition de la probabilité p_e est différente du modèle statistique qui considère toute l'expérience de conduite. Selon ce modèle, le niveau e au début de l'historique n'est rien d'autre que le niveau de départ choisi initialement pour tous les assurés dans l'échelle bonus-malus. En notant k , le niveau de départ, p_e représente donc un vecteur de probabilités à s éléments où $p_e = 1$ si $e = k$ au début de l'historique et 0 autrement ; s représente le niveau maximal du SBM.

3.1.3 Estimation des paramètres

Dans le cadre de l'approche statistique, les paramètres des différents modèles sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance en raison des propriétés intéressantes que cette méthode possède (voir section 1.5.2). Les paramètres principaux à estimer sont la fréquence de réclamation λ ainsi que les relativités bonus-malus r_i dépendamment de chaque modèle statistique utilisé.

Comme à l'approche classique, le paramètre λ représentant la fréquence de réclamation est une variable disponible dans la base de données, estimé à l'aide des coefficients de régression déjà choisis par la compagnie d'assurance. L'idée de l'utilisation de ce paramètre déjà estimé vient du fait que l'on veut imiter la tarification *a priori* actuelle de la compagnie puisque la sévérité des corrections *a posteriori* devrait dépendre de la

manière dont les primes varient en fonction des caractéristiques observables des assurés. Toutefois, la technique statistique proposée a la flexibilité de pouvoir estimer tous les paramètres d'un seul coup.

En ce qui a trait à l'estimation des relativités, le nombre de paramètres estimés dépend de la forme de relativités utilisée. Les relativités générales ne sont pas utilisées dans le cadre de l'approche statistique mais elles peuvent toutefois être estimées. La raison principale pour laquelle on ne considère pas cette forme vient du fait que d'une part, il y a beaucoup trop de paramètres à estimer selon les relativités générales en utilisant l'approche statistique. D'autre part, la distribution des relativités sans contraintes présente des tendances irrégulières à plusieurs niveaux de l'échelle bonus-malus. Le but du SBM étant d'estimer les relativités à attribuer à chaque assuré en fonction de son niveau de risque, il est donc idéal d'obtenir des distributions de relativités qui sont croissantes en fonction du niveau bonus-malus. Les relativités bilinéaires et linéaires sont donc estimées selon chacun des modèles statistiques. Tel que spécifié dans les sous-sections 2.2.2 et 2.2.3, 2 paramètres seront estimés dans le cadre des relativités linéaires tandis que 3 paramètres seront estimés dans le cadre des relativités bilinéaires. Ces paramètres estimés par maximum de vraisemblance à l'aide de la distribution du nombre de réclamations totales (équation (3.1)) serviront à estimer les relativités linéaires et bilinéaires.

3.1.4 Choix du niveau de départ

Comme avec la méthode non asymptotique de l'approche classique, il s'agira donc d'estimer les relativités du système bonus-malus en considérant tous les niveaux de départ possibles et ainsi choisir les relativités issues du niveau de départ optimal. Le niveau de départ optimal est basé sur la log-vraisemblance. La raison principale de l'utilisation de cette mesure vient du fait que l'objectif de la méthode du maximum de vraisemblance est de trouver un estimé des paramètres du modèle selon lequel la log-

vraisemblance est maximale. Il serait donc avantageux d'utiliser cette mesure afin de voir lequel des niveaux de départ utilisé, maximise le plus la log-vraisemblance. Il s'agira donc de trouver les relativités r_l à l'aide de l'équation (3.1) pour chaque distribution initiale e_k , où e_k est un vecteur de 1 au même niveau bonus-malus et 0 autrement. Après avoir répété le processus pour chaque e_k , $k = 0, 1, \dots, s$ où s est le niveau maximal du SBM, on trouve la valeur de la log-vraisemblance pour chaque cas. Le niveau optimal est celui qui maximise la valeur de la log-vraisemblance.

3.1.5 Modélisation de la variance

Les approches classique et statistique ont un point en commun : l'estimation des relativités à attribuer à chaque assuré en fonction de son niveau de risque. Il peut toutefois y avoir certaines différences entre ces approches. Une composante importante dans la comparaison des approches passe par l'étude de la modélisation du nombre de réclamations selon les 2 approches. Cette étude suppose implicitement la comparaison de 2 mesures principales : l'espérance et la variance du nombre de réclamations de l'assuré étant donné qu'il est au niveau l de l'échelle bonus-malus.

1. Approche classique

Les formules de l'espérance et de la variance ci-dessous sont basées sur les hypothèses de la distribution du nombre de réclamations décrites à la sous-section 2.5.4. En utilisant les méthodes par conditionnement, on peut montrer que l'espérance et la variance du nombre de réclamations étant donné le niveau l sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} E[N|L = l] &= E\left[E(N|\Theta, L = l)\right] \\ &= E[\lambda\Theta|L = l] \\ &= \lambda E[\Theta|L = l] \end{aligned}$$

$$= \lambda r_l, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[N|L=l] &= E[\text{Var}(N|\Theta, L=l)] + \text{Var}[E(N|\Theta, L=l)] \\ &= E[\lambda\Theta|L=l] + \text{Var}[\lambda\Theta|L=l] \\ &= \lambda E[\Theta|L=l] + \lambda^2 \text{Var}[\Theta|L=l] \\ &= \lambda r_l + \lambda^2 \text{Var}[\Theta|L=l]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

On peut clairement voir que la distribution utilisée pour modéliser le nombre de réclamations selon l'approche classique est un modèle surdispersé, c'est-à-dire avec une variance plus grande que l'espérance. La variance de la variable aléatoire θ étant donné le niveau l peut se trouver en utilisant les méthodes asymptotique et non asymptotique.

2. Approche statistique

Selon cette approche, la distribution de Poisson étant celle utilisée pour modéliser le nombre de réclamations, il est très bien connu que cette distribution est équidispersée, c'est-à-dire la variance égale à l'espérance. Les formules d'espérance et de variance sont basées sur les hypothèses de la distribution du nombre de réclamations décrites à la sous-section 3.1.1. En utilisant les méthodes par conditionnement, les formules de l'espérance et de la variance du nombre de réclamations étant donné le niveau l sont de la forme suivante :

$$E[N|L=l] = \lambda r_l, \quad \text{Var}[N|L=l] = \lambda r_l.$$

On peut clairement remarquer que l'espérance du nombre de réclamations étant donné le niveau l est la même selon les 2 approches contrairement à la variance qui est plus élevée au niveau de l'approche classique. L'approche classique est donc surdispersée à l'opposé de l'approche statistique qui est équidispersée. Afin d'avoir des approches comparables, une solution serait d'introduire de la surdispersion

dans le modèle issu de l'approche statistique. L'une des distributions les plus utilisées tenant compte de la surdispersion est la distribution binomiale négative décrite à la sous-section 1.5.1. En supposant que la distribution du nombre de réclamations selon l'approche statistique est une binomiale négative, les formules de l'espérance et de la variance du nombre de réclamations étant donné le niveau l sont de la forme suivante :

- soient $N^F | l, \eta \sim \text{Poisson}(\lambda^F \eta r_l)$ et $N^{Fc} | l, \eta \sim \text{Poisson}(\lambda^{Fc} \eta r_l)$;
- on pose $N = N^F + N^{Fc}$. On suppose que le nombre de réclamations responsables est conditionnellement à η , indépendant du nombre de réclamations non responsables. Par indépendance, $N | l, \eta \sim \text{Poisson}(\lambda \eta r_l)$;
- on suppose que $\eta \sim \Gamma(\delta, \delta)$. Donc,

$$\begin{aligned}
 E[N | L = l] &= E[E(N | \eta, L = l)] \\
 &= E[\lambda r_l \eta] \\
 &= \lambda r_l E[\eta] \\
 &= \lambda r_l,
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[N | L = l] &= E[\text{Var}(N | \eta, L = l)] + \text{Var}[E(N | \eta, L = l)] \\
 &= E[\lambda r_l \eta] + \text{Var}[\lambda r_l \eta] \\
 &= \lambda r_l E[\eta] + \lambda^2 r_l^2 \text{Var}[\eta] \\
 &= \lambda r_l + \lambda^2 r_l^2 \frac{1}{\delta},
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

où δ représente le paramètre de surdispersion issu du modèle binomiale négative. Rappelons que ce paramètre ne joue pas le même rôle que le paramètre α de l'hétérogénéité issu du modèle classique. Il sert juste à introduire de la surdispersion dans le modèle statistique. L'utilisation de la binomiale négative servira

d'une part à comparer les 2 approches. D'autre part, elle permettra de voir si les paramètres estimés en utilisant la distribution de Poisson (équation (3.1)) sont différents de ceux obtenus avec la binomiale négative.

3.2 Méthode n'utilisant pas l'historique des réclamations

Cette méthode représente un cas spécial du modèle statistique qui considère toute l'expérience de conduite. La seule différence vient du fait que cette méthode n'utilise pas l'historique. La raison principale de l'utilisation de cette méthode réside sur la confiance aux données disponibles dans la base de données. L'idée vient du fait que les données renseignant sur l'historique des réclamations passées des assurés pourraient ne pas être fiables. Elles peuvent ne pas être adéquates pour l'utiliser dans l'estimation des primes relatives, ce qui pourrait avoir un impact sur les résultats. La distribution du nombre de réclamations utilisée dans le cas de cette méthode est similaire à l'équation (3.1) à l'exception qu'on n'estime plus de probabilité p_e au début de l'historique. À la place de la probabilité p_e , on estime plutôt la probabilité p_l qui représente la probabilité de l'assuré d'être au niveau l du SBM après u années. Le niveau l représente le niveau qu'occupe l'assuré après u années d'expérience de conduite où, u représente le nombre d'années de détention du permis de conduire de l'assuré.

Dans le cas de cette méthode, la probabilité p_l est calculée en fonction de la matrice de probabilité de transition décrite à la sous-section 3.1.1. En notant k , le niveau de départ, la probabilité p_l est égale à la k^e ligne de la matrice de probabilité de transition $P(\lambda, r_l)$ à la puissance u .

3.3 Évaluation des systèmes bonus-malus

Afin de comparer la qualité de prédiction des primes relatives selon les différents systèmes bonus-malus et formes de relativités, plusieurs critères classiques statistiques sont utilisés dans le cadre du mémoire. Les critères d'information tels que l'AIC et le BIC sont utilisés afin de comparer les différents modèles bonus-malus selon chaque forme de relativités puisque le nombre de paramètres estimés selon chacun des modèles linéaire et bilinéaire est différent. De plus, la déviance est utilisée comme une mesure d'ajustement afin de voir à quel point la distribution du nombre de réclamations modélisée à l'aide des systèmes bonus-malus ajuste bien les données. Outre les mesures statistiques citées précédemment, le coefficient de variation qui est le moins important est une mesure utilisée afin de voir à quel point varient les primes des assurés dans le portefeuille suite à l'introduction des systèmes bonus-malus. Ces différentes mesures statistiques jouent le rôle des métriques d'évaluation utilisées dans l'approche classique (voir section 2.4) pour évaluer la performance des systèmes bonus-malus.

3.4 Applications avec les données

Comme à l'approche classique, les primes relatives r_i sont estimées en considérant les systèmes bonus-malus à 15 niveaux d'échelle $-1/0/+8$, $-1/0/+9$, $-1/0/+10$ et $-1/0/+11$. Cela permettra de faciliter la comparaison des différentes méthodes classiques et statistiques. Afin d'alléger le texte, on définira le premier modèle statistique comme le modèle qui considère toute l'expérience de conduite en utilisant aussi l'historique (sous-section 3.1.1). Le deuxième modèle statistique fera référence au modèle qui limite l'expérience de conduite en ne se basant que sur l'historique (sous-section 3.1.2). Le troisième modèle statistique quant à lui réfère au modèle qui considère toute l'expérience de conduite mais n'utilise pas l'historique pour estimer les relativités bonus-malus (section 3.2).

3.4.1 Modèles statistiques qui considèrent toute l'expérience de conduite

1. Relativités estimées

Selon le premier modèle statistique, le niveau 15 est le niveau de départ optimal pour tous les SBM considérés et ce, en utilisant tant les relativités linéaires que bilinéaires. Donc un nouvel assuré entrera dans le SBM au niveau 15, le niveau maximal du SBM, ce qui est relativement sévère. Les tableaux 3.2 et 3.3 présentent les résultats issus de l'estimation des relativités et surcharges bilinéaires et linéaires en utilisant le premier modèle statistique. Une analyse des tableaux indique que plus le système est sévère, plus les relativités bilinéaires diminuent dans les bas niveaux contrairement aux niveaux plus élevés. Les surcharges bilinéaires sont quant à elles relativement stables dans les bas niveaux et augmentent dans les niveaux plus élevés. Contrairement au modèle bilinéaire, le modèle linéaire semble moins pénaliser les assurés. Plus le système est sévère, plus les surcharges linéaires diminuent dans les niveaux élevés de l'échelle bonus-malus. Un fait intéressant à noter est la distribution croissante des relativités bilinéaires et linéaires tel qu'on peut l'observer dans les figures 3.1 et 3.2. On voit clairement que le modèle linéaire ajuste bien le modèle bilinéaire.

Tableau 3.2: Relativités estimées selon le modèle statistique qui considère toute l'expérience de conduite et utilise l'historique

Niveaux	Relativités bilinéaires				Relativités linéaires			
	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0,8739	0,8733	0,8715	0,8688	0,8806	0,8798	0,8799	0,8805
2	1,0274	1,0279	1,0333	1,0424	0,9228	0,9201	0,9184	0,9172
3	1,0427	1,0420	1,0468	1,0558	0,9650	0,9605	0,9568	0,9539
4	1,0581	1,0561	1,0603	1,0692	1,0072	1,0008	0,9953	0,9905
5	1,0734	1,0701	1,0738	1,0825	1,0494	1,0411	1,0337	1,0272
6	1,0888	1,0842	1,0873	1,0959	1,0916	1,0814	1,0722	1,0639
7	1,1041	1,0982	1,1007	1,1092	1,1338	1,1217	1,1106	1,1006
8	1,1194	1,1123	1,1142	1,1226	1,1760	1,1620	1,1491	1,1373
9	1,1348	1,1264	1,1277	1,1359	1,2182	1,2023	1,1875	1,1740
10	1,2925	1,1404	1,1412	1,1493	1,2604	1,2426	1,2260	1,2107
11	1,3344	1,3423	1,1547	1,1627	1,3027	1,2829	1,2644	1,2474
12	1,3763	1,3849	1,3915	1,1760	1,3449	1,3232	1,3029	1,2841
13	1,4181	1,4276	1,4348	1,4378	1,3871	1,3636	1,3414	1,3207
14	1,4600	1,4702	1,4781	1,4815	1,4293	1,4039	1,3798	1,3574
15	1,5018	1,5129	1,5215	1,5253	1,4715	1,4442	1,4183	1,3941

En considérant le troisième modèle statistique (voir section 3.2) qui représente un cas spécial du premier modèle, le SBM $-1/0/+9$ est considéré où seulement les relativités linéaires sont estimées. Le tableau B.2 en annexe présente les résultats issus de l'estimation des relativités linéaires. Le niveau 8 semble être le niveau de départ optimal pour le modèle bonus-malus $-1/0/+9$. Une analyse du tableau B.2 montre que tant les relativités que les surcharges sont plus élevées que celles du premier modèle statistique. Cela voudrait dire qu'en ne prenant pas en compte l'historique des réclamations passées des assurés, le système bonus-malus semble beaucoup plus pénaliser les assurés.

Tableau 3.3: Surcharges estimées selon le modèle statistique qui considère toute l'expérience de conduite et utilise l'historique

Niveaux	Surcharges bilinéaires				Surcharges linéaires			
	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2	18%	18%	19%	20%	5%	5%	4%	4%
3	19%	19%	20%	22%	10%	9%	9%	8%
4	21%	21%	22%	23%	14%	14%	13%	13%
5	23%	23%	23%	25%	19%	18%	17%	17%
6	25%	24%	25%	26%	24%	23%	22%	21%
7	26%	26%	26%	28%	29%	27%	26%	25%
8	28%	27%	28%	29%	34%	32%	31%	29%
9	30%	29%	29%	31%	38%	37%	35%	33%
10	48%	31%	31%	32%	43%	41%	39%	38%
11	53%	54%	32%	34%	48%	46%	44%	42%
12	57%	59%	60%	35%	53%	50%	48%	46%
13	62%	63%	65%	65%	58%	55%	52%	50%
14	67%	68%	70%	71%	62%	60%	57%	54%
15	72%	73%	75%	76%	67%	64%	61%	58%

2. Attribution d'un niveau unique

Tel qu'expliqué à la sous-section 3.1.1, les résultats précédents sont basés sur une logique de niveaux probables e au début de l'historique où les assurés se retrouvent à plusieurs niveaux en même temps. Pour remédier à cette situation, 3 scénarios ont été proposés afin d'attribuer à l'assuré un niveau unique e au début de l'historique. Dans cet ordre d'idée, en se basant sur les paramètres estimés des relativités bilinéaires et linéaires selon chaque niveau de départ optimal, le tableau 3.4 présente les résultats issus des log-vraisemblances estimées selon chaque scénario et chaque modèle bonus-malus. La log-vraisemblance du modèle de base est celui obtenu à l'aide de l'équation (3.1) sans tenir compte de l'attribution d'un niveau unique. De manière globale, les 3 scénarios semblent être des modèles adéquats avec des valeurs de log-vraisemblance proches de celles issues du modèle de base.

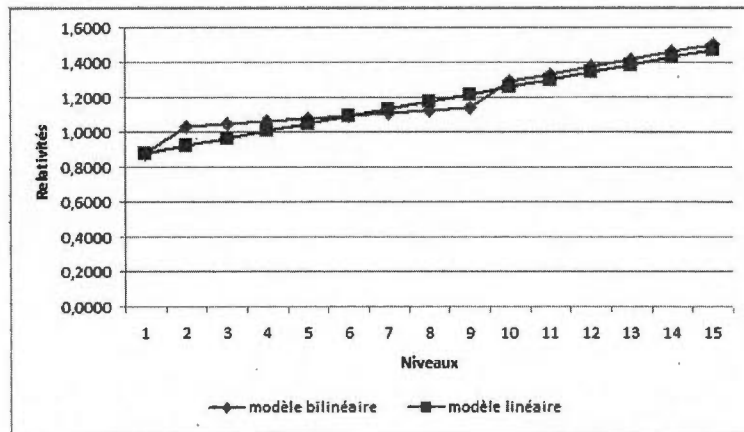


Figure 3.1: Distribution des formes de relativités du SBM $-1/0/+8$ selon le modèle statistique qui considère toute l'expérience de conduite et utilise l'historique

En comparant les 3 scénarios, on remarque que le modèle linéaire semble être plus sévère puisqu'il favorise le troisième scénario, celui attribuant à l'assuré le niveau unique supérieur. Le modèle bilinéaire quant à lui favorise plutôt le troisième scénario pour les SBM $-1/0/+8$, $-1/0/+11$ alors qu'il favorise les scénarios 1 et 2 pour les SBM $-1/0/+9$ et $-1/0/+10$ respectivement.

3.4.2 Modèle statistique qui limite l'expérience de conduite

Ce modèle quant à lui, n'utilise que l'historique de réclamations pour estimer les relativités bonus-malus. Les relativités sont estimées à l'aide de la distribution conjointe du nombre de réclamations totales (équation 3.1) et des spécifications sur p_e décrites à la sous-section 3.1.2. Selon le modèle bilinéaire, le niveau de départ optimal des assurés est le niveau 8 pour tous les modèles bonus-malus. En ce qui a trait au modèle linéaire, le niveau 9 est le niveau de départ optimal pour le SBM $-1/0/+8$ tandis que le niveau 10 est le niveau de départ optimal pour tous les autres modèles bonus-malus. Encore une fois, un nouvel assuré entrera dans les différents SBM aux niveaux moyennement

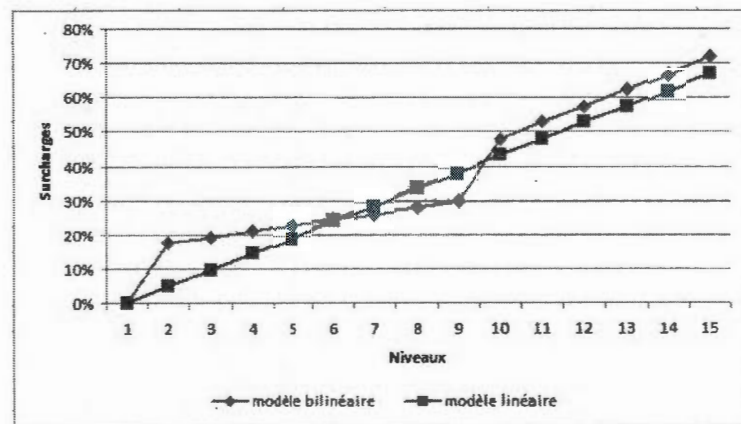


Figure 3.2: Distribution des formes de surcharges du SBM $-1/0/+8$ selon le modèle statistique qui considère toute l'expérience de conduite et utilise l'historique

élevés, ce qui est relativement sévère.

Les tableaux 3.5 et 3.6 présentent les résultats issus de l'estimation des relativités bilinéaires et linéaires des différents modèles bonus-malus. Une analyse des tableaux indique que plus le système est sévère, plus les relativités ainsi que les surcharges bilinéaires et linéaires diminuent. Le modèle linéaire semble moins pénaliser les assurés comparativement au modèle bilinéaire dans les bas niveaux contrairement aux niveaux élevés de l'échelle bonus-malus. On note aussi dans les figures 3.3 et 3.4, que la relativité bilinéaire du niveau 10 est plus petite que celle du niveau précédent du modèle bonus-malus $-1/0/+8$, ce qui ne devrait pas être le cas. Cela est probablement dû à la forte proportion des assurés au niveau 9 tel que l'indique le tableau B.1 en annexe. Ces assurés ont été pénalisés parce qu'ils ont certainement eu à faire des réclamations. De ce fait, le système semble leur attribuer plus de malus comparativement au niveau 10. Par conséquent, la surcharge associée au niveau 10 est plus petite que celle au niveau 9. Il s'agit d'une des limites du modèle bilinéaire qui peut parfois présenter des allures de distributions de relativités non souhaitables.

Tableau 3.4: Valeurs de la log-vraisemblance estimée selon les différents scénarios en tenant compte du niveau unique attribué au début de l'historique

	modèle de base	scénario 1	scénario 2	scénario 3
SBM	modèle bilinéaire			
-1/0/+8	-35 620,67	-35 624,59	-35 624,54	-35 621,26
-1/0/+9	-35 621,01	-35 622,88	-35 622,94	-35 624,37
-1/0/+10	-35 622,82	-35 626,91	-35 625,16	-35 627,44
-1/0/+11	-35 626,41	-35 628,30	-35 630,17	-35 627,39
	modèle linéaire			
-1/0/+8	-35 623,68	-35 629,07	-35 626,90	-35 626,17
-1/0/+9	-35 626,20	-35 631,32	-35 629,10	-35 628,53
-1/0/+10	-35 629,37	-35 633,90	-35 631,81	-35 630,47
-1/0/+11	-35 632,82	-35 636,91	-35 634,78	-35 633,06

3.4.3 Comparaison des modèles statistiques

En utilisant l'approche statistique, les 3 modèles utilisés pour estimer les relatifs bonus-malus présentent des résultats différents d'un modèle à un autre. Les systèmes bonus-malus semblent beaucoup plus pénaliser les assurés selon le troisième modèle statistique. Aussi, le premier modèle statistique semble aussi pénaliser davantage les assurés comparativement au deuxième modèle. L'un des avantages principaux des premier et troisième modèles statistiques est qu'ils considèrent toute l'expérience de conduite des assurés alors que le second modèle limite leur expérience de conduite notamment pour ceux ayant plus de 10 ans d'expérience de conduite. On peut voir à quel point l'utilisation de l'expérience de conduite a un impact majeur dans la tarification des primes des assurés. De plus, le fait d'inclure l'historique des réclamations passées des assurés dans le modèle du nombre de réclamations semble aussi avoir un impact dans le sens où les surcharges semblent être complètement différentes.

Tableau 3.5: Relativités estimées selon le modèle statistique qui limite l'expérience de conduite

Niveaux	Relativités bilinéaires				Relativités linéaires			
	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0,8977	0,8983	0,8993	0,8998	0,9103	0,8938	0,8947	0,8958
2	1,0898	1,0873	1,0823	1,0799	0,9452	0,9258	0,9257	0,9260
3	1,1090	1,1045	1,0976	1,0938	0,9800	0,9578	0,9568	0,9562
4	1,1283	1,1216	1,1129	1,1077	1,0149	0,9899	0,9878	0,9865
5	1,1475	1,1388	1,1281	1,1215	1,0497	1,0219	1,0188	1,0167
6	1,1667	1,1560	1,1434	1,1354	1,0846	1,0539	1,0498	1,0470
7	1,1859	1,1732	1,1586	1,1492	1,1194	1,0859	1,0808	1,0772
8	1,2051	1,1904	1,1739	1,1631	1,1542	1,1180	1,1119	1,1075
9	1,2243	1,2076	1,1891	1,1769	1,1891	1,1500	1,1429	1,1377
10	1,1575	1,2247	1,2044	1,1908	1,2239	1,1820	1,1739	1,1680
11	1,1835	1,1719	1,2196	1,2046	1,2588	1,2140	1,2049	1,1982
12	1,2095	1,1967	1,1995	1,2185	1,2936	1,2461	1,2359	1,2285
13	1,2355	1,2216	1,2245	1,2272	1,3285	1,2781	1,2670	1,2587
14	1,2615	1,2465	1,2496	1,2524	1,3633	1,3101	1,2980	1,2890
15	1,2875	1,2714	1,2746	1,2776	1,3982	1,3421	1,3290	1,3192

3.4.4 Evaluation des systèmes bonus-malus

La log-vraisemblance, les critères d'information, la déviance ainsi que le coefficient de variation sont les principales mesures utilisées pour évaluer la performance des SBM. Les tableaux 3.7 et 3.8 présentent les résultats issus de ces différentes mesures. Les notations $nap \in [0, 76]$ et $nap \in [0, 10]$ dans le tableau font référence aux premier et deuxième modèle statistique respectivement. Le troisième modèle statistique n'est pas pris en compte dans l'évaluation puisqu'il représente un cas spécial du premier modèle. Une analyse du tableau 3.7 indique que les primes sont beaucoup plus variables avec des coefficients de variation plus élevés que ceux de l'approche classique. En ce qui concerne la log-vraisemblance, une analyse du tableau 3.8 indique que le SBM $-1/0/+8$ semble être le système le mieux performant selon le deuxième modèle statistique ($nap \in [0, 10]$), en utilisant les relativités bilinéaires. Par contre, le SBM $-1/0/+10$ semble être celui qui performe le mieux en utilisant les relativités linéaires. En ce qui a trait au premier

Tableau 3.6: Surcharges estimées selon le modèle statistique qui limite l'expérience de conduite

Niveaux	Surcharges bilinéaires				Surcharges linéaires			
	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2	21%	21%	20%	20%	4%	4%	3%	3%
3	24%	23%	22%	22%	8%	7%	7%	7%
4	26%	25%	24%	23%	11%	11%	10%	10%
5	28%	27%	25%	25%	15%	14%	14%	14%
6	30%	29%	27%	26%	19%	18%	17%	17%
7	32%	31%	29%	28%	23%	21%	21%	20%
8	34%	33%	31%	29%	27%	25%	24%	24%
9	36%	34%	32%	31%	31%	29%	28%	27%
10	29%	36%	34%	32%	34%	32%	31%	30%
11	32%	30%	36%	34%	38%	36%	35%	34%
12	35%	33%	33%	35%	42%	39%	38%	37%
13	38%	36%	36%	36%	46%	43%	42%	41%
14	41%	39%	39%	39%	50%	47%	45%	44%
15	43%	42%	42%	42%	54%	50%	49%	47%

modèle statistique ($nap \in [0, 76]$), le SBM $-1/0/+8$ semble être le meilleur système prédisant le mieux le nombre de réclamations. Pour ce qui est de la comparaison des relativités bilinéaires et linéaires, les valeurs obtenues de l'AIC et du BIC indiquent que le modèle bilinéaire semble être le modèle le mieux performant avec ses plus petites valeurs d'AIC et de BIC. Rappelons que le modèle bilinéaire, malgré qu'il performe bien présente parfois des distributions de relativités non souhaitables. En ce qui a trait à la déviance, tous les modèles utilisés semblent être de bons modèles avec des valeurs de déviance plus petites qu'une valeur de χ^2_{n-p} montrant à quel point l'utilisation de n'importe quel de ces modèles bonus-malus pour la tarification des primes est adéquate. Toutefois, le SBM $-1/0/+8$, utilisant les relativités bilinéaires semble mieux performer avec des plus petites valeurs de déviance. De plus, on peut remarquer à quel point le premier modèle statistique performe mieux comparativement au deuxième modèle. D'un point de vue global, tous les modèles bonus-malus utilisés semblent être de bons

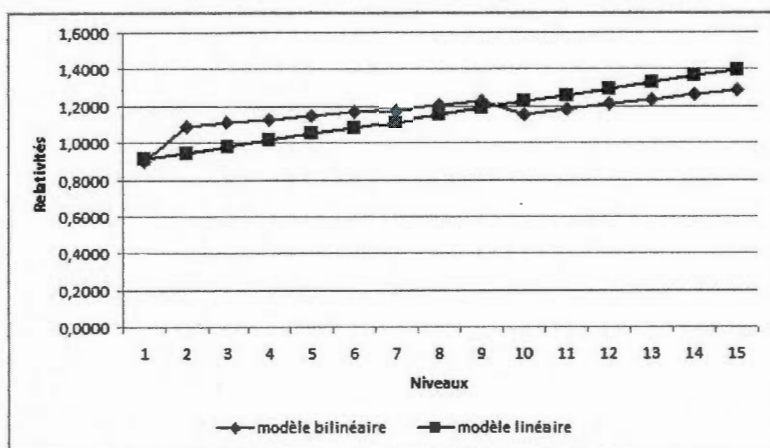


Figure 3.3: Distribution des formes de relativités du SBM $-1/0/+8$ selon le modèle statistique qui limite l'expérience de conduite

modèles avec des valeurs de log-vraisemblance, d'AIC et de BIC très proches les unes des autres. De plus, on peut remarquer que le fait de considérer toute l'expérience de conduite des assurés dans l'estimation des primes relatives semble être plus efficient.

Tableau 3.7: Mesure d'évaluation statistique variant selon la pénalité de l'échelle bonus-malus

SBM	CV	
	$nap \in [0, 76]$	$nap \in [0, 10]$
-1/0/+8	0,5052	0,4616
-1/0/+9	0,5019	0,4652
-1/0/+10	0,4986	0,4654
-1/0/+11	0,4956	0,4657

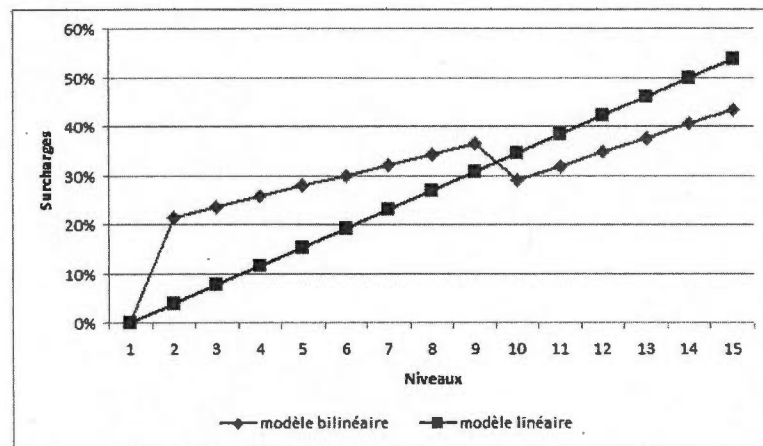


Figure 3.4: Distribution des formes de surcharges du SBM $-1/0/+8$ selon le modèle statistique qui limite l'expérience de conduite

3.5 Comparaison avec l'approche classique

Tel qu'expliqué à la sous-section 3.1.5, la comparaison des 2 approches classique et statistique sera faite à l'aide de modélisation de la variance selon les 2 approches. Pour fin d'illustration, on suppose un système bonus-malus avec échelle $-1/0/+9$ où on utilise les relativités linéaires pour déterminer l'espérance et la variance du nombre de réclamations dans les niveaux de l'échelle bonus-malus pour un assuré moyen ayant 40 ans d'expérience de conduite.

3.5.1 Approche classique

La détermination de la variance de l'équation (3.3) passe par le calcul de la variance de θ étant donné le niveau l de l'assuré ($\text{Var}[\Theta|L=l]$). Puisqu'on considère un assuré ayant 40 ans d'expérience, il faudrait inclure l'âge de la police dans le calcul de $\text{Var}[\Theta|L=l]$. En se basant sur l'équation (2.9), elle est définie comme :

$$\text{Var}[\Theta|L=l] = E[\Theta^2|L_A=l] - \left(E[\Theta|L_A=l]\right)^2$$

Tableau 3.8: Mesures d'évaluation statistique variant selon la pénalité et la forme de relativités

	modèle bilinéaire				modèle linéaire			
	Loglike	AIC	BIC	Déviance	Loglike	AIC	BIC	Déviance
SBM	$nap \in [0, 10]$							
-1/0/+8	-35 668,75	71 343,49	71 370,35	53 806,99	-35 676,37	71 356,74	71 374,64	53 822,24
-1/0/+9	-35 669,50	71 344,99	71 371,84	53 808,49	-35 676,68	71 357,37	71 375,27	53 822,87
-1/0/+10	-35 670,40	71 346,79	71 373,65	53 810,29	-35 676,08	71 356,17	71 374,07	53 821,67
-1/0/+11	-35 670,55	71 347,10	71 373,95	53 810,60	-35 676,23	71 356,47	71 374,37	53 821,97
	$nap \in [0, 76]$							
-1/0/+8	-35 620,67	71 247,34	71 274,19	53 728,23	-35 623,68	71 251,36	71 269,26	53 729,18
-1/0/+9	-35 621,01	71 248,02	71 274,87	53 730,81	-35 626,20	71 256,40	71 274,30	53 733,78
-1/0/+10	-35 622,82	71 251,64	71 278,49	53 736,89	-35 629,37	71 262,74	71 280,64	53 739,49
-1/0/+11	-35 626,41	71 258,82	71 285,67	53 747,14	-35 632,82	71 269,64	71 287,54	53 745,85

$$= \frac{\sum_{t=1}^{\infty} a_t \sum_k w_k \int_0^{\infty} \theta^2 p_l^{(t)}(\lambda_k \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta}{\sum_{t=1}^{\infty} a_t \sum_k w_k \int_0^{\infty} p_l^{(t)}(\lambda_k \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta} - \left(E[\theta | L_A = l] \right)^2. \quad (3.6)$$

Le tableau 3.10 situé à la fin du chapitre présente les résultats issus de l'estimation de l'espérance (voir équation (3.2)) et de la variance (voir équation (3.3)) du nombre de réclamations dans les niveaux bonus-malus. La variable A dans le tableau représente l'âge de la police qui est 40 ans dans le cas de notre exemple. En se basant sur le niveau de départ optimal 6 en utilisant les relativités linéaires, on remarque que le modèle est bien surdispersé avec la variance plus élevée que l'espérance. Les résultats issus du niveau de départ 15 seront plus discutés à la sous-section 3.5.2. Ces résultats sont utilisés afin de comparer sur une même base l'approche classique avec celle statistique dont le niveau de départ optimal est le niveau 15. Une analyse du tableau 3.10 montre que plus le niveau augmente, plus l'espérance et la variance augmentent. Un fait intéressant à noter est la diminution de l'espérance et de la variance lorsque les assurés entrent dans le SBM au niveau 15 au lieu du niveau 6 comme niveau de départ optimal.

3.5.2 Approche statistique

La détermination de la variance de l'équation (3.5) passe par l'estimation du paramètre δ . En comparant les expressions de la variance classique (voir équation 3.3) et statistique (voir équation (3.5)), on remarque que le terme $\text{Var}[\Theta|L = l]$ serait équivalent au terme $r_l^2 \frac{1}{\delta}$. On sait que ce terme statistique varie par niveau bonus-malus grâce au paramètre r_l qui varie en fonction du niveau. Or, $\text{Var}[\Theta|L = l]$ (voir équation (3.6)) varie par niveau bonus-malus et par âge de police. Pour s'en convaincre, la figure A.2 en annexe présente la distribution conditionnelle de l'hétérogénéité Θ dans les niveaux d'un SBM $-1/0/+9$. En notant $\pi_{\Theta|L_A=l, A=t}$ cette distribution, elle est définie comme :

$$\begin{aligned}\pi_{\Theta|L_A=l, A=t} &= \frac{\Pr[L_A = l, A = t|\Theta]\pi(\theta)}{\Pr[L_A = l, A = t]} \\ &= \frac{p_l^{(t)}(\lambda\theta)\pi(\theta)}{\int_0^\infty p_l^{(t)}(\lambda\theta)\pi(\theta) d\theta},\end{aligned}$$

où λ représente la fréquence de réclamation moyenne et A représente l'âge de la police, c'est-à-dire le nombre d'années de détention du permis de conduire. Les courbes en pointillés et en trait plein dans la figure A.2 représentent respectivement la distribution d'un assuré moyen ayant 4 ans et 40 ans d'expérience de conduite. Si l'assuré moyen avec 4 ans d'expérience de conduite entre dans le SBM au niveau 6, il se retrouverait à ces différents niveaux. En comparaison avec la distribution de celui avec 40 ans d'expérience de conduite à ces différents niveaux, une analyse de la figure indique que les 2 distributions sont différentes notamment aux niveaux 2, 4, 5, 6 et 12. Aussi, on remarque que plus le niveau est élevé, plus les distributions semblent décroître. Outre le fait qu'il y a une certaine variation de l'hétérogénéité par niveau bonus-malus, on remarque que l'expérience de conduite semble aussi avoir un impact non négligeable. Par conséquent, il serait idéal que le paramètre δ issu de l'équation 3.5 varie aussi par âge de police afin d'obtenir une variance statistique variable par niveau bonus-malus et par âge de police. Le paramètre δ a donc été estimé en supposant que $\delta = 1/\exp(\alpha_0 + \alpha_1 \times t)$ où t représente le nombre d'années d'expérience de conduite. Les relativités linéaires ainsi

que les paramètres α_0 et α_1 seront estimés simultanément en utilisant la distribution binomiale négative. La variance du nombre de réclamations dans les niveaux bonus-malus sera ensuite déterminée en fonction du paramètre estimé $\hat{\delta}$.

1. Estimation de l'espérance et de la variance à l'aide de la distribution binomiale négative

Comme à l'approche classique, le système bonus-malus $-1/0/+9$ est utilisé pour estimer les relativités linéaires en utilisant la distribution binomiale négative. Seulement les 2 modèles statistiques considérant toute l'expérience de conduite sont utilisés afin de tenir compte des 40 ans d'expérience de l'assuré moyen pris en exemple. À l'aide du niveau de départ optimal soit le niveau 15, le tableau 3.11 situé à la fin du chapitre présente les résultats issus des différentes estimations d'espérance et de variance du nombre de réclamations dans les niveaux bonus-malus. Les modèles statistiques avec et sans historique dans le tableau réfèrent au premier et troisième modèle statistique respectivement. Une analyse du tableau 3.11 indique que le fait d'utiliser la distribution binomiale négative dans le cas du premier modèle statistique (voir sous-section 3.1.1) n'a pas d'impact sur les relativités. Par contre, les résultats issus du troisième modèle statistique (voir section 3.2) sont très influencés par l'utilisation de la loi binomiale négative. Les relativités ainsi que les surcharges sont moindres contrairement à celles issues de la distribution de Poisson (voir tableau B.2 en annexe). Les figures 3.5 et 3.6 présentent respectivement les distributions de l'espérance et de la variance selon les 2 approches classique et statistique. On peut voir que plus le niveau augmente, plus l'espérance et la variance du nombre de réclamations augmente. On remarque aussi qu'en ne se basant que sur les niveaux de départs optimaux de chaque approche, c'est-à-dire les niveaux 6 et 15 selon les approches classique et statistique respectivement, la différence entre les valeurs obtenues est grande. En considérant

par contre le niveau 15 comme niveau de départ selon l'approche classique, on voit clairement que les 2 courbes d'espérance et de variance issues de l'approche statistique semblent être plus proches de celle de l'approche classique. De manière globale, les distributions croissantes d'espérance et de variance obtenues selon les 2 approches montrent à quel point les différentes approches d'estimation des relatifs fonctionnent sur une même base.

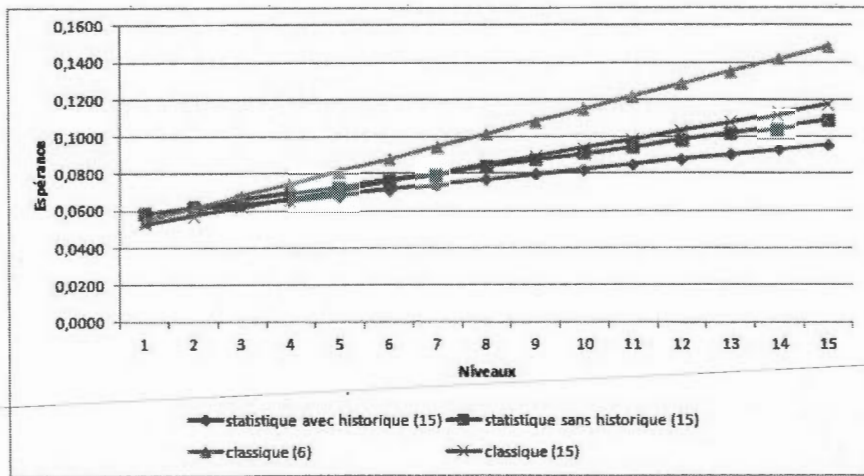


Figure 3.5: Distribution de l'espérance du nombre de réclamations dans les niveaux du SBM $-1/0/+9$

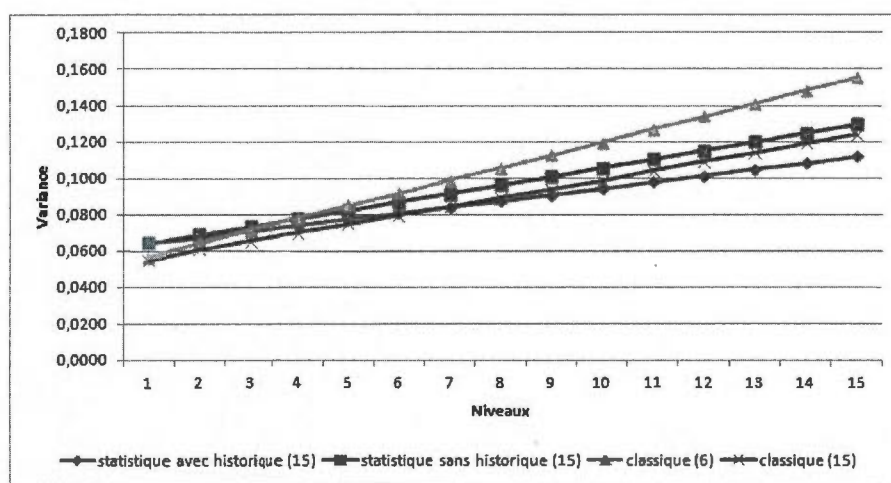


Figure 3.6: Distribution de la variance du nombre de réclamations dans les niveaux du SBM $-1/0/+9$

2. Attribution d'un niveau unique

Le choix du niveau unique selon différents scénarios tel qu'expliqué à la sous-section 3.1.1, est aussi appliqué dans le cas de la distribution binomiale négative en utilisant les 2 modèles statistiques considérés précédemment. La signification du niveau unique e dans le cas du troisième modèle statistique est un peu différente du premier modèle. Dans le cas du premier modèle, le niveau unique e est déterminé au début de l'historique. Par contre, dans le cas du second modèle, il est déterminé après u années, où u représente le nombre d'années de détention du permis de conduire de l'assuré. Donc, le niveau unique dans le cas du troisième modèle n'est rien d'autre que le niveau occupé par l'assuré dans le SBM après u années. Le tableau 3.9 présente la log-vraisemblance estimée du modèle binomiale négative selon les différents scénarios. Une analyse du tableau montre que l'utilisation de l'historique des réclamations des assurés semble être plus efficace avec une valeur de log-vraisemblance maximale. Toutefois, cela ne permet pas de comparer les 2 modèles puisque l'un des modèles utilise l'historique tandis que l'autre ne l'utilise pas. En comparant les 3 scénarios, les résultats indiquent que le modèle utilisant

l'historique semble favoriser le scénario moins sévère, celui attribuant à l'assuré le niveau inférieur selon lequel la relativité moyenne est entre le niveau inférieur et le niveau supérieur. Par contre, le modèle n'utilisant pas l'historique semble favoriser le scénario moyen, celui attribuant le niveau l selon lequel la distance au carré entre la relativité moyenne et la relativité associée au niveau l de l'assuré est minimale.

Tableau 3.9: Log-vraisemblance de la binomiale négative selon les modèles statistiques qui considèrent toute l'expérience de conduite

	modèle de base	scénario 1	scénario 2	scénario 3
Modèle avec historique	-35 453,54	-32 795,26	-34 079,86	-35 452,99
Modèle sans historique	-35 487,40	-35 494,30	-35 493,37	-35 494,64

Tableau 3.10: Espérance et variance du nombre de réclamations dans les niveaux du SBM $-1/0/+9$ selon l'approche classique

Niveaux	Approche classique			
	Relativités	Surcharges	$E(N \mid L = 1, A = 40)$	$V(N \mid L = 1, A = 40)$
Niveau de départ = 6				
1	0,8270	0%	0,0546	0,0564
2	0,9292	12%	0,0613	0,0644
3	1,0314	25%	0,0681	0,0712
4	1,1336	37%	0,0748	0,0781
5	1,2358	49%	0,0815	0,0849
6	1,3380	62%	0,0883	0,0918
7	1,4402	74%	0,0950	0,0986
8	1,5424	87%	0,1018	0,1055
9	1,6446	99%	0,1085	0,1124
10	1,7468	111%	0,1153	0,1193
11	1,8490	124%	0,1220	0,1270
12	1,9512	136%	0,1287	0,1340
13	2,0534	148%	0,1355	0,1411
14	2,1556	161%	0,1422	0,1482
15	2,2578	173%	0,1490	0,1554
Niveau de départ = 15				
1	0,8002	0%	0,0528	0,0546
2	0,8703	9%	0,0574	0,0605
3	0,9405	18%	0,0621	0,0652
4	1,0106	26%	0,0667	0,0699
5	1,0807	35%	0,0713	0,0747
6	1,1508	44%	0,0759	0,0794
7	1,2209	53%	0,0806	0,0842
8	1,2910	61%	0,0852	0,0889
9	1,3611	70%	0,0898	0,0937
10	1,4313	79%	0,0944	0,0985
11	1,5014	88%	0,0991	0,1041
12	1,5715	96%	0,1037	0,1090
13	1,6416	105%	0,1083	0,1139
14	1,7117	114%	0,1129	0,1189
15	1,7818	123%	0,1176	0,1239

Tableau 3.11: Espérance et variance du nombre de réclamations dans les niveaux du SBM $-1/0/+9$ selon l'approche statistique

	Niveau de départ = 15			
Niveaux	Relativités Surcharges		$E(N \mid L = 1, A = 40)$	$V(N \mid L = 1, A = 40)$
	Modèle statistique avec historique			
1	0,8834	0%	0,0583	0,0641
2	0,9241	5%	0,0610	0,0673
3	0,9647	9%	0,0637	0,0706
4	1,0054	14%	0,0663	0,0739
5	1,0461	18%	0,0690	0,0772
6	1,0868	23%	0,0717	0,0805
7	1,1275	28%	0,0744	0,0839
8	1,1681	32%	0,0771	0,0872
9	1,2088	37%	0,0798	0,0906
10	1,2495	41%	0,0824	0,0941
11	1,2902	46%	0,0851	0,0975
12	1,3309	51%	0,0878	0,1010
13	1,3716	55%	0,0905	0,1045
14	1,4122	60%	0,0932	0,1080
15	1,4529	64%	0,0959	0,1116
	Modèle statistique sans historique			
1	0,8882	0%	0,0586	0,0644
2	0,9431	6%	0,0622	0,0688
3	0,9981	12%	0,0659	0,0732
4	1,0530	19%	0,0695	0,0777
5	1,1079	25%	0,0731	0,0822
6	1,1628	31%	0,0767	0,0867
7	1,2178	37%	0,0804	0,0913
8	1,2727	43%	0,0840	0,0959
9	1,3276	49%	0,0876	0,1006
10	1,3826	56%	0,0912	0,1053
11	1,4375	62%	0,0948	0,1101
12	1,4924	68%	0,0985	0,1149
13	1,5473	74%	0,1021	0,1198
14	1,6023	80%	0,1057	0,1247
15	1,6572	87%	0,1093	0,1296

CONCLUSION

En conclusion, les systèmes bonus-malus utilisés pour estimer la prime des assurés jouent un rôle crucial dans la tarification d'expérience. En supposant que le portefeuille d'assurance est encore hétérogène après la classification des risques, les systèmes bonus-malus ajustent les primes estimées lors de la tarification *a priori* afin de prendre en compte les différences individuelles de chaque assuré du portefeuille en fonction de son expérience sinistre.

Les différents résultats obtenus dans ce mémoire ont montré que les relativités ainsi que les surcharges des systèmes bonus-malus considérés semblent être différentes d'une approche à une autre. En outre, le fait d'utiliser toute l'expérience de conduite des assurés dans la tarification contribue à prendre en compte le comportement réel de chaque assuré en fonction de son expérience de conduite.

L'approche statistique proposée dans ce mémoire offre plusieurs avantages. L'estimation des primes *a priori* et *a posteriori* se fait simultanément en utilisant des modèles de régression. De plus, cette approche offre une flexibilité dans l'estimation en ce qui a trait à l'utilisation ou non de l'historique des réclamations passées des assurés. Aussi, différents outils statistiques développés dans la littérature scientifique peuvent être utilisés pour évaluer la performance des systèmes bonus-malus.

Cette nouvelle approche statistique présente une nouvelle façon de calibrer les systèmes bonus-malus et ouvre ainsi la voie à d'autres recherches futures dans le domaine de la tarification d'expérience en assurance automobile.

APPENDICE A

ANNEXES

A.1 Approche classique

A.1.1 Méthode asymptotique

Tableau A.1: Distribution des assurés dans les niveaux bonus-malus selon la méthode asymptotique

Niveaux	Pr[L = l]			
	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	77,21%	75,48%	73,96%	72,62%
2	1,89%	1,82%	1,76%	1,71%
3	1,97%	1,90%	1,83%	1,78%
4	2,06%	1,98%	1,91%	1,86%
5	2,15%	2,07%	2,00%	1,94%
6	2,25%	2,16%	2,09%	2,03%
7	2,36%	2,27%	2,19%	2,12%
8	2,48%	2,38%	2,29%	2,23%
9	2,60%	2,50%	2,41%	2,33%
10	0,89%	2,62%	2,53%	2,45%
11	0,87%	0,98%	2,66%	2,58%
12	0,85%	0,98%	1,08%	2,72%
13	0,83%	0,97%	1,09%	1,19%
14	0,80%	0,96%	1,09%	1,21%
15	0,77%	0,95%	1,10%	1,23%

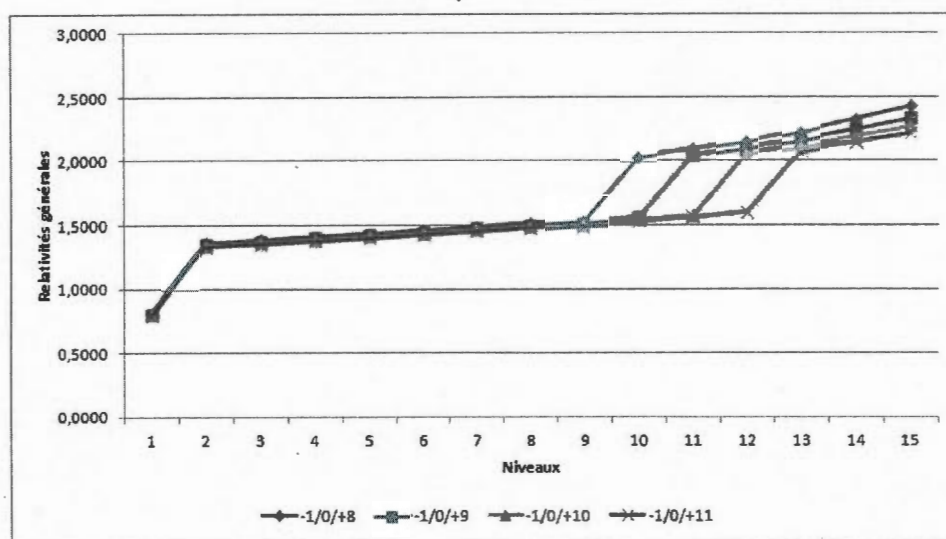


Figure A.1: Distribution des relativités générales selon la méthode asymptotique

A.1.2 Méthodes non asymptotiques

Tableau A.2: Distribution des assurés dans les niveaux bonus-malus selon la méthode non asymptotique qui limite l'expérience de conduite

Niveaux	$\Pr[L_A = l]$			
	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	52,45%	52,45%	52,45%	52,45%
2	14,35%	14,35%	14,35%	14,35%
3	4,04%	4,03%	4,03%	4,03%
4	1,99%	1,99%	1,99%	1,98%
5	1,58%	1,57%	1,57%	1,57%
6	2,36%	2,35%	2,35%	2,35%
7	2,65%	2,65%	2,64%	2,64%
8	2,77%	2,77%	2,77%	2,77%
9	2,77%	2,77%	2,77%	2,77%
10	7,87%	2,67%	2,66%	2,66%
11	3,28%	6,52%	2,36%	2,36%
12	1,46%	2,92%	5,61%	2,49%
13	1,07%	1,45%	2,59%	4,73%
14	1,07%	1,17%	1,45%	2,26%
15	1,15%	1,20%	1,27%	1,45%

Tableau A.3: Choix du niveau de départ selon la méthode non asymptotique qui limite l'expérience de conduite

Niveaux départ	Modèle général				Modèle bilinéaire			
	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	1,1055	1,1076	1,1073	1,1056	1,1026	1,1049	1,1046	1,1027
2	1,1085	1,1094	1,1079	1,1063	1,1052	1,1062	1,1047	1,1029
3	1,1117	1,1103	1,1089	1,1073	1,1076	1,1063	1,1048	1,1029
4	1,1128	1,1114	1,1101	1,1085	1,1074	1,1060	1,1046	1,1026
5	1,1139	1,1126	1,1114	1,1088	1,1068	1,1054	1,1040	1,1019
6	1,1150	1,1139	1,1118	1,1087	1,1060	1,1048	1,1032	1,1009
7	1,1162	1,1144	1,1117	1,1086	1,1052	1,1040	1,1022	1,0997
8	1,1175	1,1147	1,1119	1,1087	1,1058	1,1043	1,1021	1,0992
9	1,1204	1,1171	1,1139	1,1104	1,1111	1,1088	1,1057	1,1020
10	1,1310	1,1274	1,1240	1,1203	1,1225	1,1189	1,1149	1,1108
11	1,1480	1,1439	1,1402	1,1363	1,1302	1,1279	1,1251	1,1227

Niveaux départ	Modèle linéaire			
	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	1,0936	1,0960	1,0970	1,0968
2	1,0951	1,0976	1,0982	1,0977
3	1,0985	1,1000	1,1001	1,0992
4	1,1021	1,1027	1,1022	1,1006
5	1,1052	1,1049	1,1037	1,1013
6	1,1072	1,1062	1,1041	1,1013
7	1,1077	1,1060	1,1035	1,1006
8	1,1068	1,1047	1,1020	1,0993
9	1,1053	1,1030	1,1004	1,0979
10	1,1056	1,1031	1,1006	1,0983
11	1,1107	1,1080	1,1054	1,1033

Tableau A.4: Distribution des assurés dans les niveaux bonus-malus selon la méthode non asymptotique qui considère toute l'expérience de conduite

	Modèle général				Modèle bilinéaire			
Niveaux	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	77,77%	76,23%	74,88%	73,68%	77,77%	76,23%	74,88%	74,53%
2	2,44%	2,34%	2,26%	2,19%	2,44%	2,34%	2,26%	1,93%
3	2,29%	2,19%	2,10%	2,03%	2,29%	2,19%	2,10%	1,58%
4	1,95%	1,84%	1,75%	1,68%	1,95%	1,84%	1,75%	1,66%
5	2,05%	1,94%	1,85%	1,77%	2,05%	1,94%	1,85%	1,77%
6	2,20%	2,06%	1,96%	1,88%	2,20%	2,06%	1,96%	1,88%
7	2,34%	2,21%	2,09%	2,00%	2,34%	2,21%	2,09%	2,00%
8	2,48%	2,35%	2,23%	2,13%	2,48%	2,35%	2,23%	2,14%
9	2,61%	2,49%	2,38%	2,28%	2,61%	2,49%	2,38%	2,28%
10	0,86%	2,63%	2,53%	2,43%	0,86%	2,63%	2,53%	2,42%
11	0,83%	0,94%	2,67%	2,58%	0,83%	0,94%	2,67%	2,56%
12	0,80%	0,92%	1,04%	2,73%	0,80%	0,92%	1,04%	2,72%
13	0,77%	0,91%	1,04%	1,15%	0,77%	0,91%	1,04%	1,11%
14	0,76%	0,90%	1,03%	1,16%	0,76%	0,90%	1,03%	1,13%
15	0,74%	0,91%	1,05%	1,18%	0,74%	0,91%	1,05%	1,16%

	Modèle linéaire			
Niveaux	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	75,45%	73,93%	72,63%	71,52%
2	2,72%	2,63%	2,55%	2,47%
3	2,70%	2,60%	2,52%	2,45%
4	2,66%	2,55%	2,46%	2,39%
5	2,52%	2,41%	2,32%	2,24%
6	2,20%	2,08%	1,99%	1,90%
7	2,32%	2,19%	2,09%	2,00%
8	2,49%	2,33%	2,22%	2,13%
9	2,65%	2,50%	2,37%	2,27%
10	0,98%	2,67%	2,54%	2,42%
11	0,92%	1,06%	2,71%	2,59%
12	0,88%	1,02%	1,15%	2,76%
13	0,84%	0,99%	1,12%	1,25%
14	0,79%	0,96%	1,11%	1,24%
15	0,76%	0,94%	1,10%	1,24%

Tableau A.5: Choix du niveau de départ selon la méthode non asymptotique qui considère toute l'expérience de conduite

Niveaux départ	Modèle général				Modèle bilinéaire			
	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	1,1316	1,1325	1,1319	1,1302	1,1285	1,1294	1,1288	1,1270
2	1,1320	1,1328	1,1322	1,1305	1,1289	1,1297	1,1291	1,1273
3	1,1323	1,1331	1,1325	1,1307	1,1293	1,1300	1,1293	1,1275
4	1,1324	1,1332	1,1325	1,1307	1,1295	1,1301	1,1294	1,1274
5	1,1324	1,1331	1,1324	1,1304	1,1294	1,1299	1,1291	1,1269
6	1,1320	1,1327	1,1318	1,1298	1,1289	1,1294	1,1284	1,1261
7	1,1294	1,1317	1,1308	1,1287	1,1278	1,1281	1,1270	1,1246
8	1,1294	1,1300	1,1291	1,1271	1,1260	1,1261	1,1249	1,1224
9	1,1272	1,1277	1,1268	1,1249	1,1236	1,1236	1,1222	1,1197
10	1,1245	1,1250	1,1242	1,1224	1,1211	1,1210	1,1195	1,1169
11	1,1201	1,1219	1,1212	1,1194	1,1164	1,1181	1,1165	1,1139
12	1,1148	1,1170	1,1175	1,1159	1,1102	1,1128	1,1133	1,1105
13	1,1086	1,1110	1,1120	1,1117	1,1032	1,1061	1,1075	1,1069
14	1,1014	1,1040	1,1054	1,1056	1,0957	1,0986	1,1002	1,1005
15	1,0932	1,0960	1,0976	1,0982	1,0879	1,0909	1,0925	1,0929

Niveaux départ	Modèle linéaire			
	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	1,1194	1,1196	1,1184	1,1160
2	1,1197	1,1199	1,1186	1,1162
3	1,1204	1,1205	1,1191	1,1167
4	1,1213	1,1213	1,1198	1,1173
5	1,1221	1,1219	1,1204	1,1177
6	1,1225	1,1223	1,1207	1,1180
7	1,1222	1,1221	1,1205	1,1178
8	1,1210	1,1211	1,1197	1,1171
9	1,1187	1,1191	1,1179	1,1157
10	1,1152	1,1160	1,1153	1,1133
11	1,1106	1,1119	1,1116	1,1101
12	1,1050	1,1067	1,1069	1,1059
13	1,0985	1,1007	1,1013	1,1008
14	1,0914	1,0940	1,0950	1,0949
15	1,0839	1,0867	1,0881	1,0885

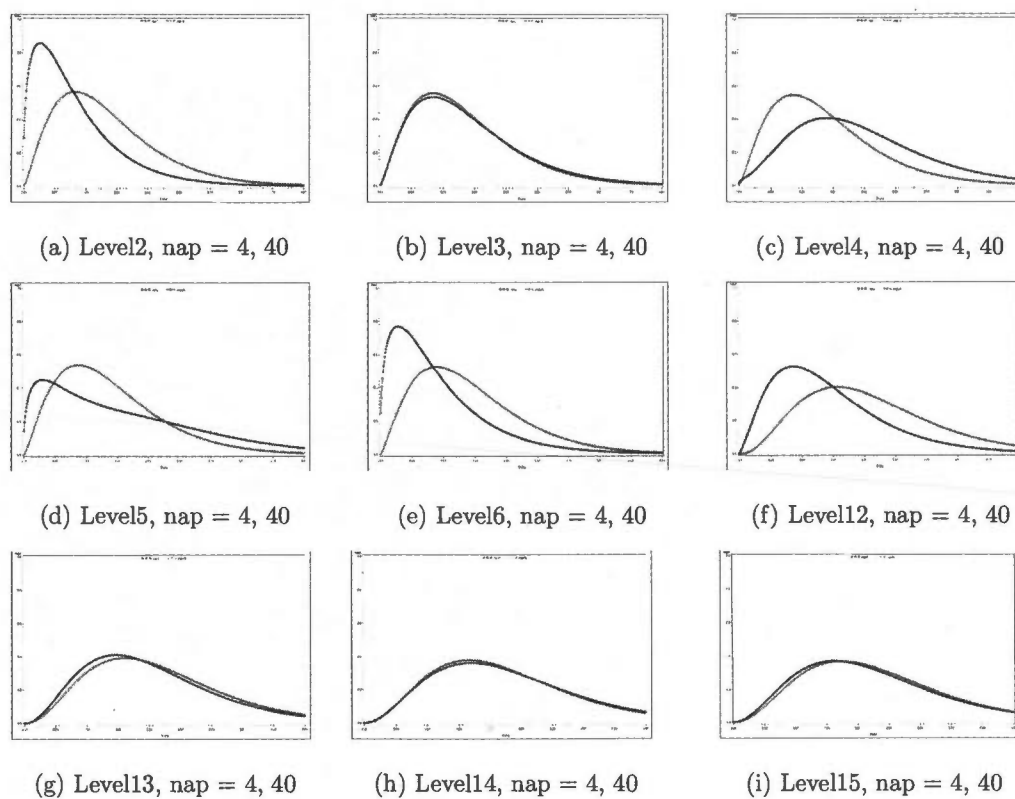


Figure A.2: Distribution conditionnelle de l'hétérogénéité pour un assuré moyen ayant 4 ou 40 ans d'expérience de conduite

APPENDICE B

APPROCHE STATISTIQUE

Tableau B.1: Distribution des assurés dans les niveaux bonus-malus selon le modèle statistique qui limite l'expérience de conduite

Niveaux	$\Pr[L = l]$							
	modèle bilinéaire				modèle linéaire			
	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11	-1/0/+8	-1/0/+9	-1/0/+10	-1/0/+11
1	75,26%	75,26%	75,26%	75,26%	73,18%	68,53%	68,53%	68,53%
2	1,55%	1,55%	1,55%	1,55%	2,09%	4,65%	4,65%	4,65%
3	1,32%	1,32%	1,32%	1,32%	1,55%	2,09%	2,09%	2,09%
4	1,08%	1,08%	1,08%	1,08%	1,32%	1,55%	1,55%	1,55%
5	0,95%	0,95%	0,95%	0,95%	1,08%	1,32%	1,32%	1,32%
6	0,98%	0,98%	0,98%	0,98%	1,11%	1,24%	1,24%	1,24%
7	6,95%	0,94%	0,94%	0,94%	1,23%	1,36%	1,36%	1,36%
8	4,76%	6,39%	0,91%	0,91%	8,26%	1,56%	1,56%	1,56%
9	3,62%	4,53%	5,91%	1,22%	5,58%	1,75%	1,75%	1,75%
10	0,63%	3,62%	4,36%	5,31%	1,24%	8,67%	1,75%	1,75%
11	0,53%	0,70%	3,66%	4,17%	0,70%	3,36%	7,82%	2,02%
12	0,46%	0,59%	0,75%	3,65%	0,59%	1,26%	3,06%	6,92%
13	0,48%	0,55%	0,67%	0,81%	0,55%	0,81%	1,23%	2,73%
14	0,58%	0,64%	0,71%	0,82%	0,64%	0,82%	0,95%	1,28%
15	0,85%	0,89%	0,96%	1,03%	0,89%	1,03%	1,13%	1,26%

Tableau B.2: Relativités linéaires du SBM $-1/0/+9$ selon le modèle statistique qui considère toute l'expérience de conduite mais n'utilise pas l'historique

SBM d'échelle $-1/0/+9$			
Niveaux	Relativités	Surcharges	Proportion
1	0,8106	0%	69,02%
2	0,9532	18%	2,83%
3	1,0958	35%	2,81%
4	1,2385	53%	2,71%
5	1,3811	70%	2,71%
6	1,5237	88%	2,70%
7	1,6663	106%	2,61%
8	1,8089	123%	2,46%
9	1,9515	141%	2,47%
10	2,0941	158%	2,69%
11	2,2367	176%	1,37%
12	2,3794	194%	1,40%
13	2,5220	211%	1,41%
14	2,6646	229%	1,40%
15	2,8072	246%	1,40%

BIBLIOGRAPHIE

- Andrade E Silva, J., et M. Centeno. 2005. « A note on bonus scales ». *Journal of Risk and Insurance* 72, p. 601-607.
- Bonsdorff, H. 1992. « On the convergence rate of bonus-malus systems ». *ASTIN Bulletin* 22, p. 217-223.
- Borgan, O., J. Hoem et R. Norberg. 1981. « A nonasymptotic criterion for the evaluation of automobile bonus systems ». *Scandinavian Actuarial Journal*, p. 165-178.
- Boucher, J.-P., M. Denuit et M. Guillén. 2007. « Risk classification for claim counts : A comparative analysis of various zero-inflated mixed Poisson and hurdle models ». *North American Actuarial Journal* 11 : 4, p. 110-131.
- Burnham, K., et D. Anderson. 2002. *Model Selection and Multi-Model Inference : A Practical Information-Theoretic Approach*. Springer, New York.
- Cameron, A., et P. Trivedi. 1986. « Econometric models based on count data : Comparisons and applications of some estimators ». *Journal of Applied Econometrics* 46, p. 347-364.
- Chant, D. 1974. « On asymptotic tests of composite hypotheses in nonstandard conditions ». *Biometrika* 62, p. 291-98.
- Dean, C., J. Lawless et G. Willmot. 1989. « A mixed Poisson - inverse Gaussian regression model ». *Canadian Journal of Statistics* 17, p. 171-182.
- Denuit, M., et J. Dhaene. 2001. « Bonus-malus scales using exponential loss functions ». *German Actuarial Bulletin* 25, p. 13-27.
- Denuit, M., X. Maréchal, S. Pitrebois et J.-F. Walhin. 2007. *Actuarial Modelling of Claim Counts*. Wiley.
- Dionne, G., et C. Vanasse. 1989. « A generalization of actuarial automobile insurance rating models : the negative binomial distribution with a regression component ». *ASTIN Bulletin* 19, p. 199-212.
- Fabio, B., S. Levantesi et M. Menzietti. 2002. « The development of an optimal bonus-malus system in a competitive market ». *ASTIN Bulletin, Vol 32, No. 1*, p. 159-170.

- Feller, W. 1971. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. II. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Ferreira, J. 1974. « The long-term effect of merit-rating plans on individual motorists ». *Operations Research*, vol. 22, p. 954–978.
- Franklin, C. 2005. *Maximum likelihood estimation*. In : *Encyclopedia of Social Measurement*. T. Vol. 2. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Frees, E. 2004. *Longitudinal and panel data : analysis and applications in the social sciences*. Cambridge University Press.
- Gilde, V., et B. Sundt. 1989. « On bonus systems with credibility scales ». *Scandinavian Actuarial Journal*, p. 13–22.
- Gourieroux, C. 1999. « The econometrics of risk classification in insurance ». *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 24, p. 119–137.
- Greenwood, M., et G. Yule. 1920. « An inquiry into the nature of frequency distributions representative of multiple happenings with particular reference to the occurrence of multiple attacks of disease or of repeated accidents ». *Journal of the Royal Statistical Society A* 83, p. 255–279.
- Hausman, J., B. Hall et Z. Griliches. 1984. « Econometric models for count data with application to the patents R & D relationship ». *Econometrica* 52, p. 909–938.
- Heras, A., J. Gil, P. Garcia-Pineda et J. Vilvar. 2004. « An application of linear programming to bonus-malus system design ». *ASTIN Bulletin* 34, p. 435–456.
- Heras, A., J. Gil et J. Vilvar. 2002. « Asymptotic fairness of bonus-malus systems and optimal scales of premiums ». *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 27, p. 61–82.
- Hinde, J. 1982. « Compound Poisson regression models ». *New York : Springer-Verlag*.
- Holla, M. 1966. « On a Poisson-inverse Gaussian distribution ». *Metrika* 11, p. 115–121.
- Kendall, M., et A. Stuart. 1977. *Advanced Theory of Statistics*, Vol. I. Griffin, London.
- Klugman, S., H. Panjer et G. Willmot. 2004. *Loss models : From Data to Decisions*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Kuha, J. 2004. « AIC and BIC comparisons of assumptions and performance ». *Sociological Methods and Research* 33, p. 188–229.
- Lawless, J. 1987. « Negative binomial and mixed Poisson regression ». *The Canadian Journal of Statistics* 15, p. 209–225.
- Lemaire, J. 1995. *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*. Boston : Kluwer Academic Publishers.

- Lindsay, B. 1995. « Mixture models : Theory, geometry and applications ». *Institute of Mathematical Statistics and the American Statistical Association*.
- Loimaranta, K. 1972. « Some asymptotic properties of bonus-malus systems ». *ASTIN Bulletin* 6, p. 233-245.
- Marshall, A., et I. Olkin. 1990. « Multivariate distributions generated from mixtures of convolution and product families ». *Topics in Statistical Dependence*, eds. H. W. Block, A. R. Sampson and T. H. Savits, *Lecture Notes-Monograph Series* 16, p. 371-393.
- Moran, P. 1971. « Maximum likelihood estimation in non-standard conditions ». *Proceeding of the Cambridge Philosophical Society* 70, p. 441-50.
- Nelder, J., et R. Wedderburn. 1972. « General linear models ». *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* 135, p. 370-384.
- Norberg, R. 1976. « A credibility theory for automobile bonus-malus system ». *Scandinavian Actuarial Journal*, p. 92-107.
- Raftery, A. 1995. « Bayesian model selection in social research ». *The American Sociological Association, Washington*, p. 111-163.
- Rolski, T., H. Schmidli, V. Schmidt et J. Teugels. 1999. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Tremblay, L. 1992. « Using the Poisson-inverse Gaussian in bonus-malus systems ». *ASTIN Bulletin* 22, p. 97-106.
- Venter, G. G. 1991. « A comparative analysis of most European and Japanese bonus-malus systems : Extension ». *The Journal of Risk and Insurance*, Vol.58, No.3, p. 542-547.
- Willmot, G. 1987. « The Poisson-inverse Gaussian distribution as an alternative to the negative binomial ». *Scandinavian Actuarial Journal*, p. 113-127.